

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ES SCIENCES

par

Jean RONAT

SUJET DE LA THÈSE :

**Contribution à l'étude du transfert thermique en écoulement
turbulent d'un gaz à propriétés physiques variables**

Soutenue le 18 juin 1971 devant la Commission d'Examen

MM. BRUN
SIESTRUNCK
MATHIEU
CASEAU

Président

Examineurs

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ES SCIENCES

par

Jean RONAT

SUJET DE LA THÈSE :

**Contribution à l'étude du transfert thermique en écoulement
turbulent d'un gaz à propriétés physiques variables**

Soutenue le 18 juin 1971 devant la Commission d'Examen

MM. BRUN
SIESTRUNCK
MATHIEU
CASEAU

Président

Examineurs



Avant de présenter les travaux qui font l'objet de cette thèse, je tiens à remercier la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France qui m'a permis d'effectuer cette étude et les ingénieurs et techniciens du Site de Chatou dont la collaboration me fut toujours précieuse.

Je suis particulièrement reconnaissant à l'égard de Monsieur le Professeur Brun, pour le grand honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ma thèse.

Que Monsieur le Professeur Mathieu trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'aide et les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie vivement Monsieur Caseau, Chef du Service Informatique et Mathématiques Appliquées pour l'intérêt constant qu'il a porté à cette étude.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur Siestrunk d'avoir bien voulu siéger à la Commission d'examen.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550415_0020

Sommaire Général

	Pages
I - Introduction	7
II - Etude bibliographique	9
III - Coefficients de frottement et de transfert thermique en aval d'une discontinuité de température pariétale	29
IV - Théorie des écoulements turbulents à propriétés physiques varia- bles - Méthode des développements asymptotiques raccordés	39
V - Etude expérimentale du transfert thermique pour un écoulement à propriétés physiques variables	63
VI - Conclusion générale	83
Annexe	87

I. — Introduction

Le sujet du présent travail a été motivé par le souhait -manifesté particulièrement dans diverses branches de l'industrie productrice d'électricité- d'une meilleure connaissance de l'influence, sur le coefficient de transfert thermique en écoulement turbulent, des variations des propriétés physiques des fluides.

L'exposé qui suit se compose de quatre parties.

La première partie est consacrée à une étude bibliographique des résultats expérimentaux et des théories existantes.

Les deuxième et troisième parties sont constituées par deux études théoriques : l'une, est relative à la région de l'écoulement située immédiatement en aval d'une discontinuité de la température pariétale, l'autre à la région de l'écoulement éloignée de toute variation brusque de cette même température pariétale.

L'étude expérimentale qui constitue la quatrième partie de ce travail porte sur la détermination du coefficient de transfert thermique en aval d'une discontinuité de la température pariétale. Elle concerne plus précisément le cas où le rapport de la température de l'écoulement à la température pariétale est compris entre 2,5 et 4.

II. — Etude bibliographique

SOMMAIRE

	Pages
0 - NOTATIONS	9
1 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	10
1.1 - Introduction	10
1.2 - Ecoulement d'eau dans un tuyau	11
1.3 - Ecoulement subsonique de gaz dans un tuyau	11
1.4 - Couche limite supersonique sur plaque plane	14
2 - THÉORIES	14
2.1 - Coefficient de frottement	14
2.2 - Coefficient de transfert thermique	21
3 - COMPARAISON EXPÉRIENCES-THÉORIES	24
4 - CONCLUSION	25
5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	26

0 - NOTATIONS

		Dimensions
D	Diamètre d'un tuyau	L
R	Rayon d'un tuyau	L
ρ	Masse volumique	ML^{-3}
μ	Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$
k	Conductivité thermique	$MLT^{-3}K^{-1}$

ν	Viscosité cinématique	L^2T^{-1}
C_p	Chaleur massique à pression constante	$L^2T^{-2}K^{-1}$
T	Température	$^{\circ}K$
p	Pression	$ML^{-1}T^{-2}$
x	Abscisse	L
y	Ordonnée	L
u	Vitesse	LT^{-1}
τ	Tension	$ML^{-1}T^{-2}$
q	Flux d'énergie	MT^{-3}
y^+	Ordonnée réduite	0
u^+	Vitesse réduite	0
cf	Coefficient de frottement	0
St	Nombre de Stanton	0
Re	Nombre de Reynolds	0
χ, E	Constantes adimensionnelles	0
f, g	Fonctions	0
Fr, Fc, Fe	Paramètres	0
r	Facteur de récupération	0
M	Nombre de Mach	0
Pr	Nombre de Prandtl laminaire	0
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent	0

l'indice p se rapporte aux grandeurs pariétales

l'indice m se rapporte aux grandeurs de mélange

l'indice g se rapporte aux grandeurs définies soit sur l'axe du tuyau soit à l'extérieur de la couche limite

Sauf spécification contraire les grandeurs non indicées sont construites soit à partir des grandeurs de mélange, cas de l'écoulement en tuyau, soit à partir des grandeurs extérieures à la couche limite.

1 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

1.1 - INTRODUCTION

On se propose dans cette partie de dresser une liste des résultats expérimentaux mettant en évidence l'influence des variations des propriétés physiques sur les coefficients de frottement et de transfert thermique d'un écoulement turbulent.

Les résultats rassemblés concernent les types d'écoulements suivants :

- Ecoulement d'eau dans un tuyau
- Ecoulement subsonique de gaz dans un tuyau
- Couche limite supersonique sur plaque plane

1.2 - ÉCOULEMENT D'EAU DANS UN TUYAU

Maurer et Letourneau [1] d'une part, Allen et Eckert [2] d'autre part, ont effectué des mesures du coefficient de frottement dans le cas d'un tube chauffé parcouru par de l'eau.

Les caractéristiques de ces écoulements sont les suivantes :

$$\text{Maurer et Letourneau : } 4 \cdot 10^3 < R_D < 5 \cdot 10^4 \quad 1 < \frac{\mu_m}{\mu_p} < 3$$

$$\text{Allen et Eckert : } 1 \cdot 3 \cdot 10^3 < R_D < 6 \cdot 5 \cdot 10^4 \quad 1 < \frac{\mu_m}{\mu_p} < 3$$

Les variations des propriétés physiques peuvent être caractérisées par le rapport μ_m/μ_p car seul le coefficient de viscosité μ varie de manière importante avec la température.

Les résultats auxquels ces auteurs sont parvenus montrent que la loi de frottement relative à un écoulement à propriétés physiques constantes demeure applicable, à condition d'évaluer la viscosité à la température de paroi.

Allen et Eckert ont également mesuré le nombre de Stanton mais n'ont pas recherché de formule de corrélation et ne fournissent pas explicitement leurs résultats expérimentaux.

1.3 - ÉCOULEMENT SUBSONIQUE DE GAZ DANS UN TUYAU

1.3.1 - Propriétés physiques

Toutes les propriétés physiques des gaz varient de manière importante avec la température. Dans la gamme de température qui a été explorée par les expérimentateurs, ces propriétés physiques peuvent être représentées par des lois de la forme :

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n_\varphi}$$

où φ désigne une des propriétés physiques du gaz et n_φ une constante attachée à celle-ci.

Ceci permet, pour un gaz donné, de tenir compte des variations des propriétés physiques par le biais du rapport T_p/T_m . De plus, pour les gaz utilisés qui sont l'air, l'hélium, l'argon, l'azote et l'hydrogène, les propriétés homologues varient de manière semblable ainsi que le montre le tableau suivant :

Gaz	n_ρ	n_μ	n_k	n_{c_p}	
Air	- 1	0,67	0,77	0,12	
He	- 1	0,68	0,68	0	
A	- 1	0,68	0,68	0	
N ²	- 1	0,65	0,75	0,12	
H ²	- 1	0,69	0,83	0,04	

pression 1 bar

On peut donc admettre, au moins approximativement, que les résultats expérimentaux pour les gaz peuvent être corrélés par une formule unique, où n'intervient que le rapport T_m/T_p .

1.3.2 - Expériences

La quasi totalité des expériences est relative au cas du tuyau chauffé ($T_p > T_m$). Kutateladze et Leontev font allusion à des expériences correspondant au cas du tuyau refroidi mais ne fournissent pas de référence précise et accessible.

Schématiquement les installations expérimentales sont constituées d'un tuyau comprenant une partie isotherme d'une longueur égale à quelques dizaines de diamètres et une partie chauffée électriquement.

En amont de la section expérimentale constituée par la partie chauffée du tuyau l'écoulement est isotherme et dynamiquement établi.

A priori les résultats expérimentaux relatifs aux coefficients de frottement et nombre de Stanton dépendront de trois paramètres qui sont :

- un nombre de Reynolds, en général $R_D = \frac{\rho_m U_m D}{\mu_m}$

- un rapport de température, en général $\frac{T_p}{T_m}$

- une abscisse réduite, en général $\frac{x}{D}$

$x = 0$ correspondant à la discontinuité de température.

1.3.3 - Coefficient de frottement

L'équation de quantité de mouvement suivant l'axe du tuyau, sous sa forme intégrée, conduit à la valeur de la tension pariétale qui est donnée par la relation suivante :

$$\tau_p = - \frac{1}{\pi D} \frac{d}{dx} \int_s \left(p + \frac{\rho u^2}{2} \right) ds$$

L'emploi de cette formule implique donc la détermination en diverses sections du profil de la pression dynamique. N'ayant pas effectué de telles mesures les divers expérimentateurs (Perkins et Worsoe-Schmidt, Mac Eligot et al. Lel'chuk et Dyadyakin) ont admis que la moyenne sur une section S du tuyau du terme ρu^2 , était égale au produit des valeurs de mélange de la masse volumique et de la vitesse :

$$\frac{1}{S} \int_s \rho u^2 ds \simeq \rho_m U_m^2$$

Ils ont déterminé la tension pariétale à partir de la formule approchée suivante :

$$\tau_p = - \frac{d}{dx} \left[p + \frac{\rho_m U_m^2}{2} \right] \frac{D}{4}$$

la pression étant supposée constante en une section et mesurée sur l'axe du tuyau.

Comme rien ne permet de préjuger de l'erreur ainsi commise on doit considérer qu'il n'existe pas présentement de mesure du coefficient de frottement qui puisse être considérée comme sûre.

1.3.4 - Nombre de Stanton

A première vue le nombre d'expériences relatives à la détermination du nombre de Stanton est très important. Il faut cependant noter que les résultats de ces expériences sont toujours présentés sous forme de formule de corrélation, et que, si rien ne permet de mettre en cause la méthode expérimentale, il n'en est pas de même pour les formules de corrélation elles-mêmes. La question essentielle qui se pose au sujet de ces formules est de savoir si elles peuvent, de par leur forme, rendre compte de la réalité.

Le nombre de Stanton dépend à priori des trois paramètres : R_D , T_p/T_m et x/D , ainsi que le montre l'analyse dimensionnelle.

$$St = St \left(R_D, \frac{T_p}{T_m}, \frac{x}{D} \right)$$

La plupart des expérimentateurs [3-10] ont cherché à corréler leurs résultats par une formule du type :

$$(1) \quad St = A R_D^{-0,2} \left(\frac{T_p}{T_m} h \left(\frac{x}{D} \right) \right) \quad (h : \text{fonction connue})$$

Perkins et Worsoe-Schmidt [11] dont les essais sont caractérisés par les valeurs suivantes du nombre de Reynolds et du rapport de température : $10^4 < R_D < 10^5$ et $1 < T_p/T_m < 4$, ont utilisé la formule de corrélation écrite ci-dessous :

$$(2) \quad St = A R_D^{-0,2} \left[\left(\frac{T_p}{T_m} \right)^m + \left(\frac{x}{D} \right)^{-0,7} \left(\frac{T_p}{T_m} \right)^n \right]$$

et ont obtenu les valeurs suivantes des paramètres :

$$m = 0,7 \quad \text{et} \quad n = 0$$

$$\text{Soit pour } \frac{x}{D} \ll 1 \quad St = A R_D^{-0,2} \left(\frac{x}{D} \right)^{-0,7} \quad (2a)$$

$$\frac{x}{D} \gg 1 \quad St = A R_D^{-0,2} \left(\frac{T_p}{T_m} \right)^{-0,7} \quad (2b)$$

Un certain nombre de remarques s'imposent :

- la formule de corrélation (2) est plus générale que la formule (1) à laquelle elle se réduirait si m et n étaient égaux, ce qui n'est pas le cas : ceci conduit à penser que la formule (1) n'est pas adaptée.

- on peut également se demander si l'utilisation de la formule (2) qui isole et de plus, fixe à priori l'influence du nombre de Reynolds R_D est justifiée. En fait rien ne permet de l'affirmer.

Dans la recherche d'une formule de corrélation pour le nombre de Stanton, qui, sans être générale, ne présenterait par ces inconvénients, il est naturel de procéder par linéarisation à partir d'un couple de valeur $(Re, T_p/T_m)$ puisque chaque expérimentateur n'a à sa disposition qu'un domaine de variation assez étroit pour le couple $(Re, T_p/T_m)$.

On peut suggérer par exemple une formule construite à partir de la formule (1) et dont les exposants de Re et T_p/T_∞ soient des fonctions de x/D .

$$(3) \quad St = R_D^{\alpha(x/D)} \left(\frac{T_\infty}{T_p} \right)^{\beta(x/D)} h \left(\frac{x}{D} \right)$$

Cette relation est obtenue en linéarisant au voisinage du point $(Re, T_p/T_\infty)$ la relation générale :

$$\log. St = F \left(\log R_D, \log \frac{T_\infty}{T_p}, \frac{x}{D} \right)$$

Il existe, bien évidemment, d'autres formules qui comme la formule (3) seraient valables dans un domaine de variations faibles de R_D et T_∞/T_p .

Le seul critère de choix d'une formule est que l'influence des paramètres R_D et T_p/T_∞ puisse dépendre de x/D : la formule (1) ne répond pas à ce critère et la formule (2) n'y répond que partiellement.

Bien entendu si les formules (1) et (2) ne peuvent prétendre traduire fidèlement le phénomène considéré, elles donnent cependant une idée globale de la relation qui lie le nombre de Stanton aux paramètres R_D et T_p/T_∞ .

Ainsi les exposants 0,2 et n (compris entre 0,3 et 0,6) de la formule (1) sont vraisemblablement assez proches des valeurs moyennes des exposants $\alpha(x/D)$ et $\beta(x/D)$ de la formule (3) : $(10^4 < R_D < 10^5, 1 < \frac{T_p}{T_\infty} < 4)$

De même au vu des formules (2a) et (2b) on peut s'attendre à ce que le coefficient $\beta(x/D)$ varie de 0 à 0,7 lorsque x/D varie de 0 à l'infini : $(10^4 < R_D < 10^5, 1 \leq T_p/T_\infty \leq 4)$.

1.4 - COUCHE LIMITE SUPERSONIQUE

Spalding et Chi [12] ont rassemblé un grand nombre de résultats expérimentaux relatifs au coefficient de frottement pour une couche limite turbulente supersonique sur plaque plane.

Les caractéristiques générales de ces essais sont les suivantes :

- Nombre de Reynolds $3 \cdot 10^5$ à 10^6
- Nombre de Mach 1 à 11

2 - THÉORIES

2.1 - COEFFICIENT DE FROTTEMENT

2.1.1 - Introduction

Il existe de nombreuses théories semi-empiriques ayant trait à la détermination du coefficient de frottement pour un écoulement turbulent à propriétés variables. Ces théories sont des prolongements, plus ou moins justifiés, des méthodes employées pour l'étude des écoulements à propriétés physiques constantes.

On peut distinguer deux approches différentes :

- l'une suppose connue l'expression du coefficient de viscosité turbulente,
- l'autre fait appel à une transformation portant sur les grandeurs définissant l'écoulement ; après cette transformation ces grandeurs sont alors liées par des relations indépendantes des variations des propriétés physiques du fluide.

Il sera montré ici que toutes ces théories, qu'elles soient fondées sur l'une ou l'autre approche, conduisent à une loi de vitesse qui s'écrit :

$$y^+ = \frac{\chi}{E} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} \int_0^{u/u_*} f(z) \exp\left(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g(z)\right) dz$$

où y^+ désigne l'ordonnée réduite $\frac{y}{v_p} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$

La constante E et les fonctions f et g sont spécifiques de chaque théorie, leurs expressions font généralement intervenir la température qui est liée à la vitesse par la loi de Crocco.

De cette loi des vitesses il est possible de déduire la loi de frottement qui, dans le cas asymptotique $\tilde{c}f \rightarrow 0$ s'écrit sous la forme :

$$F_c \tilde{c}f = \tilde{c}f_0 (F_e R_e)$$

Les paramètres F_c et F_e , qui diffèrent d'une théorie à l'autre, dépendent des variations des propriétés physiques de l'écoulement. $\tilde{c}f_0(R_e)$ n'est autre que la fonction liant le nombre de Reynolds et le coefficient de frottement dans le cas d'un écoulement à propriétés physiques constantes.

2.1.2 - Théories fondées sur l'emploi d'une viscosité turbulente :

Par définition de la viscosité turbulente μ_t , la tension τ est liée au gradient de vitesse par la relation :

$$\tau = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$$

On admet que la tension τ est constante et, de ce fait, égale à sa valeur à la paroi,

$$\tau_p = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$$

De même que pour un écoulement à propriétés physiques constantes, on distingue deux types de coefficients de viscosité turbulente, l'un dû à Prandtl et l'autre dû à Von Karman.

a) Viscosité de Prandtl

Dans le cas d'un fluide à propriétés physiques constantes, le coefficient de viscosité de Prandtl s'écrit :

$$\mu_t = \chi^2 \rho y^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

Il est une constante universelle.

Cette loi se généralise au cas d'un fluide à propriétés physiques variables sous l'une des deux formes suivantes :

$$\mu_t = \chi^2 \rho y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

$$\mu = \chi^2 y^2 \frac{\partial \rho u}{\partial y} \quad (2)$$

qui conduisent aux lois de vitesse :

$$y^+ = \frac{1}{E} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{cf}} \int_0^{u/u_g} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz \right) \quad (1)$$

$$y^+ = \frac{1}{E} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{cf}} \int_0^{u/u_g} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)' \right]^{1/2} dz \right) \quad (2)$$

y^+ et $\tilde{cf}$ désignant respectivement l'ordonnée réduite et le coefficient de frottement.

Ces lois, dans le cas de propriétés physiques constantes, se réduisent à la loi logarithmique bien connue ; E est une constante d'intégration qui dépend de l'écoulement dans la sous-couche visqueuse.

b) Viscosité de Von Karman

La loi de viscosité turbulente de Von Karman s'écrit pour un fluide à propriétés physiques constantes :

$$\mu_t = \chi^2 \rho \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2}$$

Cette loi se généralise au cas d'un fluide à propriétés physiques variables sous les deux formes suivantes :

$$\mu_t = \chi^2 \rho \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2} \quad 3 \quad \mu_t = \chi^2 \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)} \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \quad (4)$$

qui conduisent aux lois de vitesse correspondantes :

$$y^+ = \frac{\chi}{E} \sqrt{\frac{2}{cf}} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \int_0^{u/u_g} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{cf}} \int_0^z \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz \right) dz + F \quad (3)$$

$$y^+ = \frac{\chi}{E} \sqrt{\frac{2}{cf}} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \int_0^{u/u_g} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{cf}} \int_0^z \left[\left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)' \right]^{1/2} dz \right) dz + F \quad (4)$$

La constante d'intégration F est prise nulle ainsi qu'il est d'usage dans le cas d'un écoulement à propriétés physiques constantes.

On constate que les lois de vitesse (1), (2), (3) et (4) se ramènent facilement à la forme générale énoncée au paragraphe 2.1.1.

2.1.3 - Théorie fondée sur l'existence d'une transformation :

Dans l'étude de la couche limite laminaire compressible sur plaque plane, de nombreux auteurs et parmi eux, Stewartson [13] et Illingworth [14] ont introduit une transformation de type différentiel portant sur les variables y et u . Cette transformation permet de ramener la résolution des équations de la couche laminaire compressible à celle des équations de la couche limite laminaire incompressible dans la mesure où le produit $\rho\mu$ peut être considéré comme constant.

Deux points sont à noter : d'une part, cette transformation ne s'applique qu'aux écoulements de gaz et d'autre part, elle a une origine purement mathématique. Son application au cas de la couche limite turbulente à propriétés physiques variables ne saurait donc être justifiée théoriquement ; malgré cela, de nombreux auteurs l'ont utilisée dans ce cas sous des formes diverses.

a) Forme générale de la transformation

Toute transformation peut être caractérisée par la donnée de quatre fonctions φ_u , φ_y , φ_t et φ_T qui permettent de définir les grandeurs transformées $\bar{u}$, $\bar{y}$, $\bar{\tau}_p$ et $\bar{T}_r$ par les relations suivantes :

$$\bar{u} = \int_0^u \varphi_u (\rho, \rho_p, \rho_g, M_g) du$$

$$\bar{y} = \int_0^y \varphi_y (\rho, \rho_p, \rho_g, M_g) dy$$

$$\bar{\tau}_p = \varphi_t (\rho_p, \rho_g, M_g) \tau_p$$

$$\bar{T}_r = \varphi_T (\rho_p, \rho_g, M_g) T_g$$

Le principe d'utilisation de cette méthode consiste à admettre que la vitesse $\bar{u}$, l'ordonnée $\bar{y}$ et la tension $\bar{\tau}_p$ sont liées par la relation valable dans le cas d'un fluide à propriétés physiques constantes, les propriétés physiques du fluide étant évaluées à la température de référence $\bar{T}_r$.

Définissant les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad \bar{y}^+ = \frac{\bar{y} u^*}{\nu_r} \quad \text{avec} \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_r}} \quad (*)$$

ν_r est la valeur de la viscosité cinématique à la température de référence T_r . On admet que u^+ et y^+ sont liées par la loi de vitesse adimensionnelle valable dans le cas d'un fluide à propriétés physiques constantes. Par hypothèse, on a la relation :

$$\bar{y}^+ = \frac{1}{E} \exp (\chi \bar{u}^+)$$

qui s'écrit après dérivation :

$$d \bar{y}^+ = \frac{\chi}{E} \exp (\chi \bar{u}^+) d \bar{u}^+$$

(*) Les grandeurs comportant la lettre r en indice sont évaluées à la température de référence T_r .

Par ailleurs, un calcul algébrique simple montre que :

$$d \bar{y}^+ = \varphi_y \frac{\mu_p}{\mu_r} \sqrt{\varphi_\tau} \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_p}} dy^+$$

$$d \bar{u}^+ = \frac{\varphi_u}{\sqrt{\varphi_\tau}} \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_g}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} d \left(\frac{u}{u_g} \right)$$

ce qui conduit à la loi de vitesse suivante :

$$y^+ = \frac{\chi}{E} \int_0^{u/u_g} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \frac{\mu_r}{\mu_p} \frac{\varphi_u}{\varphi_\tau \varphi_y} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_g}} \int_0^z \frac{\varphi_u}{\sqrt{\varphi_\tau}} dz \right) dz + F$$

La constante F sera prise égale à zéro, sa valeur exacte n'ayant d'ailleurs que peu d'importance.

On retrouve alors la loi de vitesse générale (cf. paragraphe 2.1.1)

$$y^+ = \frac{\chi}{E} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} \int_0^{u/u_g} f(z) \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g(z) \right) dz$$

en posant :

$$f(z) = \frac{\varphi_u}{\varphi_y \varphi_\tau} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_y}} \frac{\mu_r}{\mu_p}$$

$$g(z) = \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_g}} \int_0^z \frac{\varphi_u}{\sqrt{\varphi_\tau}} dz$$

2.1.4 - Formes particulières des fonctions f et g

Les diverses théories précédemment considérées conduisent toutes à la loi générale de vitesse.

Le tableau suivant (page 19) indique les hypothèses faites par les divers auteurs et précise les fonctions f et g auxquelles conduisent leurs théories.

Les expressions des fonctions $f\left(\frac{u}{u_g}\right)$ et $g\left(\frac{u}{u_g}\right)$ font intervenir, par le biais de la masse volumique, la température.

Cette dernière est liée à la vitesse par la relation de Crocco

$$\frac{T}{T_p} = \frac{T_p}{T_g} + \left(1 - \frac{T_p}{T_g} + \frac{r}{2} (\gamma - 1) M_g^2 \right) \frac{u}{u_g} - \frac{r}{2} (\gamma - 1) M_g^2 \left(\frac{u}{u_g} \right)^2$$

2.1.5 - Coefficient de frottement - Théorie asymptotique (cf $\rightarrow 0$)

Il est possible à partir de la loi de vitesse précédente, de déterminer le coefficient de frottement pour un écoulement turbulent, soit de couche limite, soit entre plaques planes. Ces deux cas vont être considérés.

Il est à noter que la valeur de E sera prise égale à sa valeur E_0 pour un écoulement à propriétés physiques constantes : en toute rigueur E dépend des variations des propriétés physiques dans la sous-couche visqueuse, variations qui tendent à devenir négligeables lorsque le coefficient de frottement tend vers zéro, le rapport des températures T_p/T_g restant fini.

Auteurs	Réf.	Années	Hypothèses	f	g
Smith Harrop	15	1946	Coefficient de viscosité de Prandtl (1)	$\sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}}$	$\int_0^{u/u_g} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz$
Van Driest 1	16	1951			
Kalikman	17	1946			
Dorrance	18				
Kutateladze Leontev	19	1964			
Clemnow 1	20	1950	Coefficient de Prandtl (2)	$\left[\left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)' \right]^{1/2}$	$\int_0^{u/u_g} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)' \right]^{1/2} dz$
Frankl Voisel	21	1937	Coefficient de viscosité de Von Karman (3)	$\sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}}$	$\int_0^{u/u_g} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz$
Wilson	22	1950			
Rubesin Maydew Varga	23	1951			
Van Driest 2	24	1955			
Deissler Loeffler	25	1959			
Clemnow 2	20	1950	Coefficient de Von Karman(4)	$\sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}}$	$\int_0^{u/u_g} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)' \right]^{1/2} dz$
Mager	26	1958	Transformation	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \left(\frac{\rho_g}{\rho} \frac{\rho_p}{\rho^2} \right)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_p}}$
Libby Baronti	27	1966		$\frac{\rho_p}{\rho} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}}$	$\sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}}$
Goldmann	28	1954		$\frac{\mu}{\mu_p} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}}$	$\int_0^{u/u_g} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz$

a) Ecoulement en conduite

La loi de frottement pour un écoulement en conduite sera recherchée sous la forme d'une relation liant les coefficients de frottement et nombre de Reynolds suivants :

$$\tilde{c}_f = \frac{2 \tau_p}{\rho_g u_g^2} \quad R_R = \frac{\rho_y u_g R}{\mu_g}$$

- R est le rayon de la conduite ou la demi-distance entre plaques selon les cas.

Le nombre de Reynolds R_R s'obtient aisément, en fonction du coefficient de frottement et des grandeurs caractéristiques des variations des propriétés physiques du milieu, à partir de la loi de vitesse. On a en effet :

$$\frac{R_{up}^*}{v_p} = y_g^+ = \frac{\chi}{E} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}_f}} \int_0^1 f(z) \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}_f}} g(z) dz \right)$$

$$R_R = y_g^+ \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}} \frac{\mu_p}{\mu_g} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}_f}}$$

Soit :

$$R_R = \frac{\chi}{E} \left(\frac{\rho_g}{\rho_p} \right)^{1/2} \frac{\mu_p}{\mu_g} \frac{2}{\tilde{c}f} \int_0^1 f(z) \exp(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g(z)) dz$$

Dans le cadre d'une théorie asymptotique ($\tilde{c}f \rightarrow 0$) cette relation peut encore s'écrire :

$$R_R = \frac{1}{E} \left(\frac{\rho_g}{\rho_p} \right)^{1/2} \frac{\mu_p}{\mu_g} \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} \frac{f(1)}{g'(1)} \exp(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g(1)) [1 + O(\sqrt{\frac{\tilde{c}f}{2}})]$$

En posant :

$$F_c = \frac{1}{g^2(1)} \quad F_R = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \frac{\mu_g}{\mu_p} \frac{g'(1)}{f(1)} g(1)$$

on trouve la loi de frottement sous la forme indiquée au paragraphe 2.1.1, à savoir :

$$R_R F_R = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{\tilde{c}f}{2} F_c} \exp(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f} F_c})$$

b) Ecoulement de couche limite sur plaque plane

Dans le cas d'une couche limite sur plaque plane, les paramètres caractéristiques de l'écoulement sont le coefficient de frottement $\tilde{c}f = 2\tau_p / \rho_g u_g^2$ et le nombre de Reynolds $R_x = u_g x / \nu_g$ (x désigne l'abscisse de la section comptée à partir du bord d'attaque).

Dans le cas présent l'équation intégrale de Von Karman s'écrit :

$$d R_x = \frac{2}{\tilde{c}f} d R_\theta$$

R_θ désigne le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur d'impulsion.

$$R_\theta = \frac{u_g}{\nu_g} \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_g u_g} \left(1 - \frac{u}{u_g}\right) dy$$

Tous calculs effectués, on aboutit à l'expression suivante du nombre de Reynolds :

$$R_x = \frac{\chi}{E} \frac{\mu_p}{\mu_g} \frac{\rho_g}{\rho_p} \left(\frac{2}{\tilde{c}f}\right)^2 \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_g} z (1 - z) f(z) \pi \left[\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g(z) \right] dz$$

avec :

$$\pi(t) = \frac{12}{t^4} \left[e^t \left(1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - 1 \right]$$

Le développement asymptotique de R_x ($\tilde{c}f \rightarrow 0$) s'écrit alors :

$$R_x = \frac{1}{\chi E} \frac{\mu_p}{\mu_g} \frac{f(1)}{g'^2(1)} \exp(\chi \sqrt{\frac{2}{\tilde{c}f}} g'(1)) \frac{2}{\tilde{c}f}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme précédemment évoquée (paragraphe 2.1.1) :

$$F_x R_x = \frac{1}{\chi E} \frac{2}{F_c \chi f} \exp \left(\chi \sqrt{\frac{2}{F_c \chi f}} \right)$$

moyennant les définitions suivantes de F_c et F_x

$$F_c = \frac{1}{g^2(1)} \quad F_x = \frac{\mu_g}{\mu_p} \frac{(g'(1) g(1))^2}{f(1)}$$

Le tableau suivant dresse la liste des différents auteurs et des valeurs des fonctions F_c , F_r et F_x auxquelles conduisent leurs théories.

Tableau récapitulatif des paramètres F_c , F_r et F_x

Auteurs	N°	F_c	F_r	F_x
Smith Harrop Van Driest 1 Kalikman Dorrance Kutateladze - Leont'ev	1	$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz \right)^{-2}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \frac{1}{\sqrt{F_c}}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \frac{1}{F_c}$
Clemnow I	2	$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)} dz \right)^{-2}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g}} \frac{1}{\sqrt{F_c}}$	$\frac{\nu_g}{\nu_p} \sqrt{\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{\rho_p} z \right)} \Big _{z=1} \frac{1}{F_c}$
Frankl-Voishel Wilson Rubesin-Maydew- Varga Van Driest Deissler-Loeffler	3	$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz \right)^{-2}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \frac{1}{\sqrt{F_c}}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \frac{1}{F_c}$
Clemnow II	4	$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)} dz \right)^{-2}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \sqrt{\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right)} \Big _{z=1} \frac{1}{\sqrt{F_c}}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{\rho_g} z \right) \Big _{z=1} \right]^2 \frac{1}{F_c}$
Mager	5	$\frac{\mu_o}{\mu_g}$	$\frac{\mu_g}{\mu_o}$	$\left(\frac{\mu_g}{\mu_o} \right)^2$
Libby-Baronti	6	$\frac{\rho_g}{\rho_p}$	$\frac{\mu_g}{\mu_p}$	$\frac{\nu_g}{\nu_p}$
Goldmann	7	$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} dz \right)^{-2}$	$\frac{1}{\sqrt{F_c}}$	$\frac{1}{F_c}$

2.2 - COEFFICIENT DE TRANSFERT THERMIQUE

2.2.1 - Hypothèses

Les théories usuelles relatives au transfert thermique reposent toutes sur les trois hypothèses suivantes :

1ère hypothèse :

Le rapport de la tension de frottement τ au flux d'énergie q est indépendant, pour une section donnée, de la position du point où ces grandeurs sont considérées.

2ème hypothèse :

Le nombre adimensionnel $\mu_t c_p / k_t = Pr_t$, appelé nombre de Prandtl turbulent (μ_t et k_t étant respectivement la viscosité et la conductivité turbulente) est constant. La valeur adoptée pour Pr_t varie suivant les auteurs de 0,89 à 1.

3ème hypothèse :

La vitesse réduite $u^+ = \frac{u}{u_p^*}$ et l'ordonnée réduite $y^+ = \frac{y}{\nu_p} u_p^*$ ($u_p^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$) sont liées par une loi supposée connue et qui diffère d'une théorie à l'autre.

2.2.2 - Formulation générale

Les résultats auxquels aboutissent les diverses théories portent sur le facteur de récupération r et le nombre de Stanton $\tilde{St}$ défini par les relations suivantes :

$$T_{ad} = T_g \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_g^2 \right)$$

$$\tilde{St} = \frac{q_p}{\rho_g u_g C_{p_g} (T_g - T_o)}$$

T_{ad} est la température de paroi adiabatique.

Un calcul classique dont les principaux développements sont fournis par Deissler conduit aux expressions générales

$$r = Pr_t + 0 \text{ (cf)}$$

$$\frac{\tilde{St}}{\tilde{cf}} = \frac{1}{Pr_t \left[1 + \left(1 - \frac{Pr_t}{Pr} \right) \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}} \sqrt{\frac{\tilde{cf}}{2}} \int_0^\infty \frac{du^+}{\frac{Pr_t}{Pr} - 1 + \frac{\mu}{\mu_p} \frac{dy^+}{du^+}} \right]}$$

Ces relations montrent immédiatement que, d'une part, le facteur de récupération est sensiblement égal au nombre de Prandtl turbulent (fait vérifié expérimentalement pour $Pr_t = 0,9$) et que, d'autre part, la relation liant le nombre de Stanton au coefficient de frottement ne dépend des variations des propriétés physiques du fluide que par l'intermédiaire du terme correctif :

$$\sqrt{\frac{\tilde{cf}}{2}} \left(1 - \frac{Pr_t}{Pr} \right) \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}} \int_0^\infty \frac{du^+}{\frac{Pr_t}{Pr} - 1 + \frac{\mu_p}{\mu} \frac{dy^+}{du^+}}$$

Le propre de chaque théorie, compte tenu du choix du nombre de Prandtl turbulent est de conduire à une expression particulière de ce terme correctif. Or il apparaît en définitive que c'est le choix du nombre de Prandtl turbulent, et non l'évaluation du terme correctif, qui conditionne le plus les résultats théoriques. Pour une valeur donnée du nombre de Prandtl turbulent et sous réserve que le nombre de Prandtl laminaire

reste voisin de l'unité, l'incidence des diverses évaluations du terme correctif sur la valeur du nombre de Stanton est de l'ordre de quelques pour cent. Il est donc impossible de trancher entre les diverses théories au vu des résultats expérimentaux dont la dispersion est au moins du même ordre de grandeur.

Le tableau suivant dresse une liste des principaux auteurs et précise, pour chacun d'entre eux, la loi de vitesse adoptée et la valeur du nombre adimensionnel $\sqrt{\frac{2}{\text{cf}}} (1 - \frac{\text{cf}}{2\text{Pr}_t \text{St}})$ dans le cas de l'air.

Il a semblé intéressant de faire figurer (**) dans ce tableau un calcul qui se situe à mi-chemin entre les théories de Rubesin et de Deissler en ce sens qu'il suppose une loi de vitesse d'écoulement à propriétés physiques constantes plus évoluée que celle utilisée par Rubesin et qu'il aboutit contrairement à la théorie de Deissler à une formule explicite très voisine d'ailleurs de la formule de Rubesin.

Auteur	Réf.	Année	Loi de vitesse	$\sqrt{\frac{2}{\text{cf}}} \left(1 - \frac{\text{cf}}{2\text{Pr}_t \text{St}} \right)$
Seban	29	1956	Loi de vitesse (propriétés physiques constantes)	1,9
Rubesin	30		$y^+ < 11,5 \quad \frac{dy^+}{du^+} \frac{\mu_p}{\mu} = 1$ $y^+ > 11,5 \quad \frac{dy^+}{du^+} \frac{\mu_p}{\mu} = \infty$	$2,3 \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}}$
Deissler Eian	31	1952	Equations différentielles	Formule non explicite
**			Loi de vitesse de Spalding	$2,14 \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}}$

2.3 - REMARQUES GÉNÉRALES

A la suite de cette synthèse il paraît tout d'abord opportun de rappeler que les lois de frottement et de transfert thermique obtenues font intervenir des grandeurs adimensionnelles bâties à partir des caractéristiques extérieures (la couche limite) ou axiales (conduite). Dans ce dernier cas, il faut noter que les grandeurs adimensionnelles utilisées habituellement sont bâties à partir des grandeurs de mélange. Cette différence n'a pas toujours bien été perçue.

Il est également intéressant de souligner que l'effet des variations des propriétés physiques se répercute sur les termes du premier ordre de la loi de frottement alors qu'il ne se fait sentir que sur les termes du second ordre de la loi de transfert thermique, exprimée sous la forme inspirée de l'analogie de Reynolds.

L'introduction des facteurs F_c et F_θ due à Spalding et Chi permet par ailleurs de rendre compte très clairement de cet effet en ce qui concerne la loi de frottement. Quant à la loi de transfert thermique, il convient de mettre l'accent sur l'influence prépondérante du choix du nombre de Prandtl turbulent.

3 - COMPARAISON ENTRE EXPÉRIENCES ET THÉORIES

Il a paru intéressant de comparer les résultats expérimentaux et ceux déduits des théories considérées dans cette bibliographie. Une première remarque s'impose : toutes les théories étudiées ne portent que sur les régions de l'écoulement éloignées de toute variation brusque de la température pariétale ; les comparaisons entre résultats théoriques et expérimentaux ne pourront donc porter que sur cette partie de l'écoulement.

3.1 - ÉCOULEMENT DE LIQUIDE EN TUYAU

A priori, ne seront considérées que les théories référencées par les numéros 1 à 4, les autres étant spécifiques des gaz. Les résultats auxquels elles conduisent $F_c = 1$ et $F_r = \mu_g/\mu_p$, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux sur le coefficient de frottement.

3.2 ÉCOULEMENT EN TUYAU A FAIBLE VITESSE

Ainsi qu'il a été déjà signalé, les résultats expérimentaux sont inexistant dans le cas d'une paroi refroidie et, dans le cas d'une paroi chauffée, les formules de corrélation, qui sont sensées les traduire sont sujettes à caution. Seule sera prise en considération la formule proposée par Perkins et Worsoe-Schmidt qui s'écrit :

$$St = A R_D^{-0,2} \left(\frac{T_p}{T_m} \right)^{-0,7} \quad \begin{array}{l} 10^4 \leq R_D \leq 10^5 \\ 1 \leq \frac{T_p}{T_m} \leq 4 \end{array}$$

Dans la gamme de nombre de Reynolds et de rapport des températures considérées, chaque théorie relative au coefficient de frottement combinée avec la loi de Rubesin conduit à une relation entre nombre de Stanton, de Reynolds et rapport des températures T_p/T_m , qu'il est possible d'écrire sous la forme :

$$St = A R_D^{-0,2} \left(\frac{T_p}{T_m} \right)^\beta$$

Le tableau suivant dresse la liste des valeurs de β auxquelles conduisent les diverses théories :

Théorie	1	2	3	4	5	6	7
β	- 0,25	- 0,17	- 0,36	- 0,13	- 0	- 0,85	- 0,5

On constate que les valeurs de β sont en général assez éloignées de la valeur expérimentale de - 0,7. Seules les théories 6 et 7 conduisent à des valeurs voisines de celle-ci.

3.3 - ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE SUR PLAQUE PLANE

La comparaison porte sur les 162 résultats expérimentaux rassemblés par Spalding et Chi [12] et relatifs au coefficient de frottement. Le tableau suivant fournit les éléments

de cette comparaison qui sont, d'une part l'écart moyen et d'autre part, l'écart quadratique moyen e_q entre valeurs théoriques et expérimentales. Ces deux grandeurs sont définies par les relations suivantes :

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |v_{t1} - v_{e1}|$$

$$e_q = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{t1} - v_{e1})^2 \right]^{1/2}$$

où v_e et v_t désignent respectivement les valeurs expérimentales et théoriques.

Théorie	1	2	3	4	5	6	7
e_m	0,21	0,95	0,10	0,61	0,06	- 0,01	- 0,04
e_q	0,28	1,24	0,15	0,77	0,12	0,11	0,11

Au vu de ces résultats, les théories conduisant à des résultats en accord avec l'expérience sont les théories référencées par les numéros 3, 5, 6 et 7.

4 - CONCLUSION

De l'étude bibliographique précédente se dégagent les différents points suivants :

- il n'existe pas de résultats expérimentaux pour les écoulements subsoniques de gaz dans le cas d'une paroi refroidie,

- les résultats relatifs au cas d'un écoulement subsonique en présence d'une paroi chauffée sont sujets à caution pour diverses raisons : évaluation approchée du coefficient de frottement, formules de corrélation inadéquates pour le coefficient de transfert thermique. Seuls, les résultats de Perkins et Worsoe-Schmidt peuvent être considérés comme sûrs,

- il n'existe pas de théories relatives aux coefficients de frottement et de transfert thermique pour la région située en aval d'une discontinuité de température,

- les théories concernant la partie de l'écoulement éloignée de la discontinuité de température dérivent des théories de Prandtl et de Von Karman ou de considérations plus ou moins justifiées sur l'existence d'une transformation permettant de ramener l'étude des écoulements à propriétés physiques variables à celle des écoulements à propriétés physiques constantes.

De ces considérations découle l'orientation de l'étude qui va suivre et dont le but général est l'évaluation de l'influence des variations des propriétés physiques du fluide sur les coefficients de frottement et de transfert thermique. L'étude des écoulements supersoniques a été éliminée comme étant trop complexe tant du point de vue théorique qu'expérimental. On s'est donc attaché à développer deux théories valables dans le cas d'écoulement subsonique ; la première inspirée des travaux de Lighthill traite de l'écoulement immédiatement en aval d'une discontinuité de la température pariétale, la seconde, inspirée des méthodes de perturbation singulière, porte sur l'écoulement en des sections éloignées de toute variation brusque de la température pariétale. Du point de vue expérimental, on s'est proposé d'étudier le transfert thermique en aval d'une discontinuité de la température pariétale pour un écoulement d'air dans le cas d'une paroi refroidie.

5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] MAURER, LETOURNEAU - Friction factors for fully developed turbulent flow in ducts with and without heat transfer. *J. Basic Engineering* 86 627-636 1964.
- [2] ALLEN, ECKERT - Friction and heat transfer measurements to turbulent pipe flow of water (Pr - 7 and 8) at uniform wall heat flux. *Journal of Heat Transfer*, August 1964.
- [3] TAYLOR, KIRCHGESSNER - Measurements of heat transfer and friction coefficients for helium flowing in a tube at surface temperature up to 5900°R. *N.A.S.A. T.N.D.* 1959.
- [4] Mac CARTHY, WOLF - Forced convection heat transfer to gaseous hydrogen at high heat flux and high pressure in a smooth round electrically heated tube. *A.R.S. Journal* vol. 30 N° 1, January 1960.
- [5] DE LA HARPE, PERROUD - Transfert de chaleur avec l'hydrogène gazeux en écoulement turbulent dans un tube et dans un espace annulaire (paroi lisse). *C.R.A.S.*, Janvier 1961.
- [6] WEILAND - Measurement of local heat transfer coefficients for flow of hydrogen in a smooth tube at high surface to fluid bulk temperature. *A.I.Ch. E.* 1962.
- [7] DALLE, DONNE, BOWDITCH - Local heat transfer and average friction coefficients for subsonic laminar, transitional and turbulent flow of air in a tube at high temperature. *Nuclear Engineering*, January 1963.
- [8] KIRILLOV, MALYUGIN - Local heat transfer during the flow of gas in a pipe at high temperature differences. *Teplofizika Vysokikh temperatur*, Vol. 1 N° 2 Sept. 1963.
- [9] HENDRICKS, SIMONEAU, FRIEDMANN - Heat transfer characteristics of cryogenic hydrogen from 1000 to 2500 p.s.i.a. flowing upwards in uniformly heated straight tubes. *N.A.S.A. TND* 2977 1965.
- [10] Mac ELIGOT, MAGEE, LEPERT - Effects of large temperature gradients on convective heat transfer : the downstream region. *Journal of heat transfer*, February 1965.
- [11] PERKINS, WORSOE-SCHMIDT - Turbulent heat and momentum transfer for gases in a circular tube at wall to bulk temperature ratios to seven. *I.J.H.M.T.*, Vol. 8 pages 1011-1031 1965.
- [12] SPALDING CHI - The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer. *Journal of fluid Mechanics* Vol. 18, part 1, 1964.
- [13] STEWARTSON - Correlated compressible and incompressible boundary layers. *Proc. Roy. Soc. A* 200 84-100 1949.
- [14] ILLINGWORTH - Steady flow in laminar boundary layer of a gas. *Proc. Roy. Soc. A* 199 533 1949.
- [15] SMITH HARROP - *Roy. Aircraft Estmt Tech. Note Aero.* 1759 1946.
- [16] VAN DRIEST - *J. Aero Sci.* 18 145 1951.
- [17] KALIKMAN - *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 106 123 1959.
- [18] DORRANCE - *Convair Sci. Res. Lab. Res. Rep.*, 1106 1960.
- [19] KUTATELADZE, LEONTEV - Turbulent boundary layers in compressible gases. Arnold 1964.

-
- [20] CLEMNOW - Aero. Res. Counc. Lóndon N° 14051, F.M. 1568 *DGWRD* Rep 50/6 1950.
- [21] FRANKL, VOISHEL - *Nat. Adv. Comm. Aero. Wash. Tech. Note* N° 1052 1943.
- [22] WILSON - *J. Aero. Sci.* 17585 1950.
- [23] RUBESIN, MAYDEW, VARGA - *Nat. Adv. Comm. Aero. Wash. Tech. Note* N° 2305 1951.
- [24] VAN DRIEST - 50 years of boundary layer theory. (Gortler and Tollmien) 1955.
- [25] DEISSLER, LOEFFLER - *Nat. Aero. Space Admin. Tech. Rep.* 40 R-17, 1959.
- [26] MAGER - Transformation of the compressible turbulent boundary layer. *Journal of Aeronautical Science*, May 1958.
- [27] BARONTI, LIBBY - Velocity profiles in turbulent compressible boundary layers. *A.I.A.A. Journal*, Vol. 4 N° 2, February 1966.
- [28] GOLDMANN - Heat transfer to supercritical water and other fluids with temperature dependent properties. *Chem. Eng. Proc. Symposium Series. Nuclear Eng. Part I*, Vol. 50 N° 11, 1954.
- [29] SEBAN - Heat transfer to turbulent boundary layers with variable free-stream velocity. *A.S.M.E.* January 1956 N° 1, Vol. 78.
- [30] DEISSLER, EIAN - Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties. *N.A.C.A. T.N.* 2629, 1952.
- [31] RUBESIN - A modified Reynolds analogy for the compressible turbulent boundary layer on a flat plate. *N.A.C.A. T.N.* 2917.

III. — Coefficients de frottement et de transfert thermique en aval d'une discontinuité de température pariétale

SOMMAIRE

	Pages
0 - NOTATIONS	29
1 - INTRODUCTION	30
2 - DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE - ÉQUATIONS	31
2.1 - Description	31
2.2 - Equations	31
2.3 - Changements de variables	32
3 - COEFFICIENT DE FROTTEMENT - NOMBRE DE STANTON	34
3.1 - Expression	34
3.2 - Fonctions CF et ST	36
3.3 - Cas particuliers de l'air	37
4 - CONCLUSION	38
5 - BIBLIOGRAPHIE	38

0 - NOTATIONS

	Dimensions
x coordonnée le long de la plaque	L
y coordonnée normale à la plaque	L
u vitesse suivant ox	LT^{-1}
v vitesse suivant oy	LT^{-1}
R rayon d'un tuyau	L
ρ masse volumique	ML^{-3}

h	enthalpie	L^2T^{-2}
μ	viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$
k	conductivité thermique	$MLT^{-1}K^{-1}$
C_p	chaleur spécifique à pression constante	$L^2T^{-2}K^{-1}$
τ	tension	$ML^{-1}T^{-2}$
q	flux de chaleur	MT^{-3}
Pr	nombre de Prandtl	0
Ψ	fonction de courant	$ML^{-1}T^{-1}$
η	variable adimensionnelle	0
f	fonction adimensionnelle	0
g	fonction adimensionnelle	0
$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$	vitesse de frottement	LT^{-1}
$l^* = \frac{\nu_p}{u^*}$	longueur caractéristique de la sous-couche visqueuse	L
h^*	enthalpie de référence	L^2T^{-2}
CF	fonction adimensionnelle	0
ST	fonction adimensionnelle	0
cf	coefficient de frottement	0
St	nombre de Stanton	0
$\beta = \frac{h^*}{h_p}$	paramètre	0

L'indice 0 se rapporte aux grandeurs définies

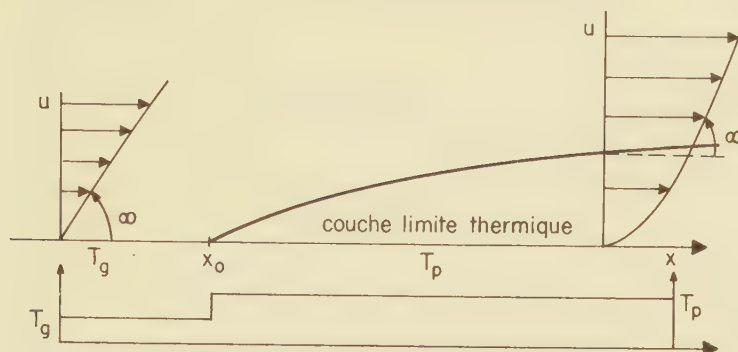
	au point de discontinuité de la température
p	pariétales $x > x_0$
g	à l'extérieur de la couche limite ou aux grandeurs moyennes dans le cas d'un écoulement de tuyau

1 - INTRODUCTION

Dans le cas d'un fluide à propriétés physiques constantes Lighthill [1] a pour une couche limite sur plaque plane, calculé le coefficient de transfert thermique immédiatement en aval d'une discontinuité de la température pariétale. L'objet du présent travail est d'étendre cette étude au cas d'un fluide à propriétés physiques variables et plus précisément, de déterminer les coefficients de frottement et de transfert thermique.

2 - DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE ÉQUATIONS

2.1 DESCRIPTION



On considère une couche limite turbulente sur plaque plane ou un écoulement établi dans un tuyau, supposé isotherme (température T_g) pour $x < x_0$, et telle que pour $x > x_0$ la température pariétale soit maintenue égale à T_p .

Immédiatement en aval de la discontinuité de température, seule la sous-couche visqueuse est concernée du moins directement par le phénomène, et on pourra donc ne considérer dans les équations que les termes d'origine visqueuse. On admettra, bien qu'il existe de forts gradients longitudinaux de température, que les équations de la couche limite demeurent applicables.

A l'extérieur de la sous-couche visqueuse le changement de la température pariétale se traduira par un déplacement des lignes de courant sans modification appréciable des caractéristiques dynamiques de l'écoulement et en particulier du terme $\rho U'V'$. Cette propriété est vérifiée rigoureusement dans le cas d'une couche limite, et de façon approchée dans le cas d'un écoulement de tuyau. Dans ce dernier cas où le phénomène est plus complexe en raison du caractère fini de la dimension normale aux lignes de courant, on peut cependant admettre que lorsque cette dimension est grande par rapport à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, c'est-à-dire lorsque le nombre adimensionnel U^*R/ν est grand (ce qui est le cas pour un écoulement turbulent), tout se passe au voisinage de la sous-couche visqueuse comme si ce rapport était infini. En résumé on admettra qu'à l'extérieur de la sous-couche visqueuse la tension n'est pas modifiée par la discontinuité de la température pariétale et qu'elle est en outre indépendante de l'abscisse.

2.2 - ÉQUATIONS

Sous les hypothèses faites précédemment les équations et conditions aux limites sont les suivantes :

Equation de continuité :	$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$	Système I
Equation d'impulsion :	$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$	
Equation d'énergie :	$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$	
Condition aux limites :	$\begin{array}{llll} x = x_0 & u = \frac{\tau_g}{\mu_g} y & h = h_g \\ x > x_0 & y = 0 & u = 0 & v = 0 & h = h_p \\ x > x_0 & y = \infty & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_g}{\mu_g} & h = h_g \end{array}$	

2.3 - CHANGEMENTS DE VARIABLES

2.3.1 - Fonction de courant

Effectuons le changement de variable qui consiste à introduire la fonction de courant Ψ définie par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho u \qquad - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \rho v$$

Le système I s'écrit alors :

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] \\ & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ & x = x_0 \quad \Psi = -\frac{\tau_g}{2\nu_g} y^2 \quad h = h_p \\ & x > x_0 \quad y = 0 \quad \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad h = h_p \\ & x > x_0 \quad y = \infty \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\tau_g}{\nu_g} \quad h = h_g \end{aligned} \right]$$

2.3.2 - Groupe de transformation - Variables adimensionnelles

Le système II est invariant, ainsi qu'il est facile de le vérifier par le groupe de transformation à un paramètre G_{α} défini par :

$$x - x_0 \rightarrow \alpha^3(x - x_0), y \rightarrow \alpha y, \quad \Psi \rightarrow \alpha^2 \Psi, \quad h \rightarrow h$$

L'existence de G_α implique que par un choix de variables invariantes par G_α le système d'équations aux dérivées partielles II peut être réduit à un système d'équations différentielles.

En outre, le changement de variable de Stewartson-Illingworth [2] $y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_g} dy$ transforme le système d'équations précédent, où ρ et μ interviennent séparément, en un nouveau système où ces deux grandeurs n'interviennent plus que sous la forme du produit $\rho\mu$. Ce fait a guidé le choix des nouvelles variables définies comme suit :

$$\eta = \left(\frac{x - x_0}{l^*} \right)^{-1/3} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_p} \frac{dy}{l^*}$$

$$f = \left(\frac{x - x_0}{l^*} \right)^{2/3} \frac{\Psi}{\mu_p}$$

$$g = \frac{h - h_p}{h^*}$$

$$\text{avec } u^* = \frac{\tau_p}{\rho_p} \quad l^* = \frac{v_p}{u^*} \quad h^* = \frac{q_p}{\rho_p u^*} \left(\frac{x - x_0}{l^*} \right)^{1/3}$$

Ces variables sont adimensionnelles et invariantes par G_α . On obtient ainsi le système d'équations différentielles ordinaires vis-à-vis de la variable indépendante η

$$\text{Système III} \quad \begin{cases} (cf')' + \frac{1}{3} (2ff' - f'^2) = 0 & f(0) = 0 & f'(0) = 0 & f''(0) = 1 \\ \left(\frac{cg'}{\text{Pr}} \right)' + \frac{2}{3} f g' = 0 & g(0) = 0 & g'(0) = \text{Pr}_p \\ c = \frac{\rho\mu}{\rho_p \mu_p} & h = h_p (1 + \beta g) & \beta = \frac{h^*}{h_p} \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles dépend, pour un gaz donné, de deux paramètres β et h_p . En outre on ne connaît pas la valeur de β , mais celle de h_g qui est reliée à h_p et β par la relation

$$h_g = h_p \left[1 + \beta g(\eta, \beta, h_p) \right] \Big|_{\eta=\infty}$$

On notera enfin que l'on peut déduire des définitions précédentes, le rapport de la tension pariétale à la tension à l'extérieur de la sous-couche visqueuse. Ce rapport s'écrit :

$$\frac{\tau_p}{\tau_g} = \frac{1}{c(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

3 - COEFFICIENT DE FROTTEMENT NOMBRE DE STANTON

3.1 - EXPRESSIONS

3.1.1 - Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement et le nombre de Stanton dépendent des enthalpies h_p et h_g , d'un nombre de Reynolds R_g et du rapport $(x - x_0)/H$. Suivant les cas, la signification de R_g et H est différente.

$$\text{Pour une couche limite} \quad R_g = \frac{x_0 u_g}{\nu_g} \quad H = x_0$$

$$\text{Pour un écoulement en tuyau} \quad R_g = \frac{R u_g}{\nu_g} \quad H = R$$

on a donc de manière très générale :

$$cf = cf(h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H})$$

$$St = St(h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H})$$

Par définition, le coefficient de frottement s'écrit :

$$\begin{aligned} cf(h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) &= \frac{2 \tau_p}{\rho_g u_g^2} \\ &= \frac{\tau_p}{\tau_g} \times \frac{2 \tau_g}{\rho_g u_g^2} \end{aligned}$$

$$\text{Or, on a : } \frac{\tau_p}{\tau_g} = \frac{1}{c(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

$$\text{et } \frac{2 \tau_g}{\rho_g u_g^2} = cf_0(R_g)$$

$cf_0(R_g)$ est par définition égal au coefficient de frottement pour un écoulement de fluide à propriétés physiques constantes caractérisé par la valeur R_g du nombre de Reynolds.

On peut donc écrire :

$$cf(h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = CF(h_p, h_g) cf_0(R_g)$$

$cf_0(R_g)$ désignant le coefficient de frottement pour un écoulement de fluide à propriétés physiques constantes

$$\begin{aligned} CF(h_p, h_g) &= \frac{1}{c(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty} \\ h_g &= h_p [1 + \beta g(\eta, h_p, \beta)] \Big|_{\eta=\infty} \end{aligned}$$

3.1.2 - Nombre de Stanton

La définition du nombre de Stanton s'écrit par ailleurs :

$$\text{St} (h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \frac{q_p}{\rho_g u_g (h_g - h_p)}$$

or :

$$q_p = \beta h_p \rho_p u^* \left(\frac{x}{l^*} \right)^{-1/3}$$

$$h_g - h_p = \beta h_p g (\eta, h_p, \beta) \Big|_{\eta=\infty}$$

On peut donc écrire :

$$\text{St} (h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \left(\frac{x - x_0}{l^*} \right)^{-1/3} \frac{\rho_p u^*}{\rho_g u_g} \frac{1}{g (\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

En remplaçant u^* et l^* par leurs expressions de définition

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}} \quad u_g^* = u \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{cf}{2}}$$

$$l^* = \frac{v_p}{u^*} \quad l_g^* = \frac{v_p}{u_g} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{2}{cf}}$$

on aboutit à l'expression suivante du nombre de Stanton

$$\text{St} (h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \left(\frac{x - x_0}{H} \right)^{-1/3} R_g^{-1/3} \left(\frac{cf}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_p \rho_p}{\mu_g \rho_g} \right)^{1/3} \frac{1}{g (\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

D'où en posant :

$$\text{ST} (h_p, h_g) = \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\text{Pr}_g}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{[C^2(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)]^{1/3} f(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

la relation finale s'écrit :

$$\text{St} (h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \frac{1}{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\text{Pr}_g^2}{3} \right)^{1/3}} \left(\frac{x - x_0}{H} \right)^{-1/3} R_g^{-1/3} \left(\frac{cf_0}{2} \frac{(R_g)}{2} \right)^{1/3} \text{ST}(h_p, h_g)$$

L'introduction de la constante $\Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\text{Pr}_g^2}{3} \right)^{1/3}$ est destinée à normaliser à 1 la valeur de la fonction $\text{ST} (h_p, h_g)$ lorsque les enthalpies h_p et h_g sont égales.

En résumé on a les relations suivantes :

$$\text{Cf} (h_g, h_p, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \text{Cf}_0 (R_g) \text{CF} (h_p, h_g)$$

$$\text{St} (h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \frac{1}{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\text{Pr}_g^2}{3} \right)^{1/3}} \left(\frac{x - x_0}{H} \right)^{-1/3} R_g^{-1/3} \left(\frac{cf_0}{2} \frac{(R_g)}{2} \right)^{1/3} \text{ST}(h_p, h_g)$$

$$CF(h_p, h_g) = \frac{1}{C(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

$$ST(h_p, h_g) = \frac{1}{[C^2(\eta, h_p, \beta) f'(\eta, h_p, \beta)]^{1/3}} \times \frac{g(\eta, h_g, 0)}{g(\eta, h_p, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

3.2 - FONCTIONS CF et ST

La détermination des fonctions CF (h_p, h_g) et ST (h_p, h_g) implique la résolution du système III qui ne peut en général être effectuée que par des méthodes numériques. Toutefois dans certains cas qui vont être étudiés cette résolution se simplifie.

3.2.1 - Cas $\rho\mu$ constant

Cette condition entraîne $C = 1$

L'équation différentielle relative à f s'intègre analytiquement et on obtient :

$$f = \frac{\eta^2}{2}$$

ce qui conduit à résoudre la seule équation différentielle

$$\left(\frac{g}{Pr}\right)' + \frac{\eta^2}{3} g' = 0 \quad g(0) = 0 \quad g'(0) = Pr_p$$

Dans ce cas

$$CF = 1 \quad ST = ST(h_p, h_g)$$

3.2.2 - Cas $\rho\mu$ et Pr constants

On a alors également $f : \eta^2/2$. L'équation différentielle précédente admet pour solution

$$g = Pr \int_0^\eta e^{-Pr t^3/9} dt$$

Ce qui conduit à $CF = 1$ et $ST = 1$

3.2.3 - Cas $\rho\mu \sim h^n$, Pr constant

Dans ce cas qui correspond assez bien à celui des gaz le système III ne dépend plus que du seul paramètre β puisque l'on peut alors écrire :

$$c = (1 + \beta g)^n$$

Le système III devient :

$$\left[(1 + \beta g)^n f'\right]' + \frac{1}{3} (2ff'' - f'^2) = 0 \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 1$$

$$\left[(1 + \beta g)^n g'\right]' + \frac{2}{3} f g' = 0 \quad g(0) = 0 \quad g'(0) = Pr$$

Les fonctions CF et ST dépendent alors du seul paramètre h_g/h_p

$$CF \left(\frac{h_g}{h_p} \right) = \frac{1}{C(\eta, \beta) f''(\eta, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

$$ST \left(\frac{h_g}{h_p} \right) = \left[\frac{1}{C^2(\eta, \beta) f''(\eta, \beta)} \right]^{1/3} \frac{g(\eta, 0)}{g(\eta, \beta)} \Big|_{\eta=\infty}$$

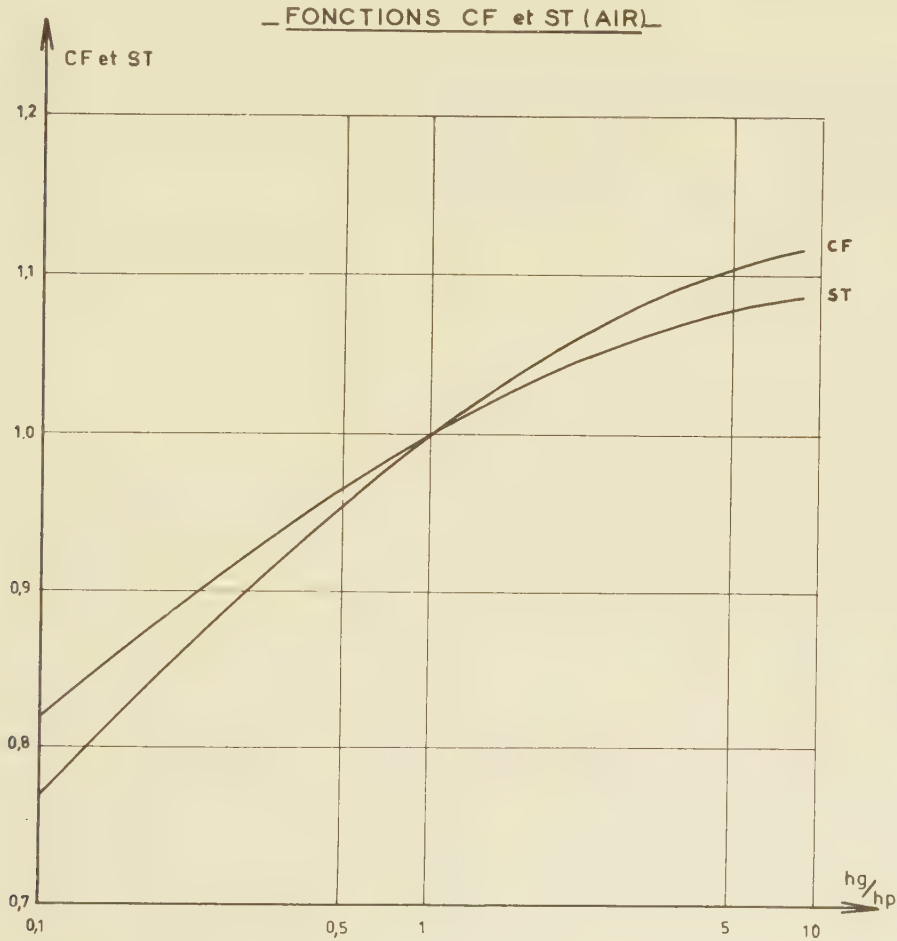
$$\frac{h_g}{h_p} = 1 + \beta g(\eta, \beta) \Big|_{\eta=\infty}$$

3.3 - CAS PARTICULIER DE L'AIR

Dans le cas de l'air les fonctions CF et ST ne dépendent que du rapport h_p/h_g car on peut écrire de façon approximative :

$$\rho \mu = h^{0,22}$$

La figure suivante présente les variations de CF et ST en fonction de h_g/h_p .



4 - CONCLUSION

L'étude précédente a permis de déterminer le coefficient de frottement et le nombre de Stanton en aval d'une discontinuité de la température pariétale

$$cf(h_g, h_p, R_p, \frac{x - x_0}{H}) = cf_0(R_g) CF(h_p, h_g)$$

$$St(h_p, h_g, R_g, \frac{x - x_0}{H}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})(\frac{Pr_g}{3})^{1/3}} \left(\frac{x - x_0}{H}\right)^{-1/3} R_g^{-1/3} \left(\frac{cf_0(R_g)}{2}\right)^{1/3} ST(h_p, h_g)$$

Ces résultats montrent que l'on peut séparer les influences des divers paramètres h_g , h_p , R_g et $x - x_0/H$.

La solution du problème posé se ramène donc à la détermination des deux fonctions $CF(h_p, h_g)$ et $ST(h_p, h_g)$ qui a été faite dans le cas de l'air.

5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] LIGHTHILL - Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. *Proceedings of the Royal Society* 202 A 359 (1950).
- [2] STEWARTSON - Correlated compressible and incompressible boundary layers. *Proceedings of the Royal Society* 200 A 84-100 (1949).

IV. — Théorie des écoulement turbulents à propriétés physiques variables

Méthode des développements asymptotiques raccordés

SOMMAIRE

	Pages
0 - NOTATIONS	39
I - INTRODUCTION	41
II - DÉFINITIONS.....	42
III - ÉCOULEMENTS TURBULENTS A PROPRIÉTÉS PHYSIQUES CONSTAN- TES	42
IV - ÉCOULEMENTS TURBULENTS A PROPRIÉTÉS PHYSIQUES VARIABLES	49
V - CONCLUSION	59
VI - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	61

NOTATIONS

	Dimensions
y : Coordonnée normale à la paroi	L
R : Distance à la paroi du bord de la couche limite ou rayon du tuyau	L
U : Vitesse parallèle à la paroi	LT^{-1}
T : Température	$^{\circ}K$
ρ : Masse volumique	ML^{-3}
μ : Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$
C_p : Chaleur massique à pression constante	$L^2T^{-2}^{\circ}K^{-1}$
k : Conductivité thermique	$ML T^{-3}^{\circ}K^{-1}$
h : Enthalpie massique	L^2T^{-2}

Pr	: Nombre de Prandtl	0
Re	: Nombre de Reynolds	0
τ	: Tension	ML T ⁻³
q	: Flux thermique	M T ⁻³
U*	: Vitesse de frottement $(\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}})$	L T ⁻¹
h*	: Enthalpie de frottement $(\frac{q_p}{\rho U^*})$	L ² T ⁻²
n _p	: Paramètre caractéristique des variations de ρ	0
n _{μ}	: Paramètre caractéristique des variations de μ	0
n _k	: Paramètre caractéristique des variations de k	0
n _{Cp}	: Paramètre caractéristique des variations de Cp	0
R*	: Paramètre adimensionnel $(\frac{R U_p^*}{v_p})$	0
y*	: Ordonnée réduite $(\frac{y U_p^*}{v_p})$	0
V*	: Vitesse réduite $(\int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_p}} du)$	0
h*	: Enthalpie réduite $(\int_0^h \frac{\sqrt{\rho \tau_p}}{q_p} dh)$	0
f, F	: Fonctions - Loi de vitesse	0
g, G	: Fonctions - Loi d'enthalpie	0
β, γ	: Paramètres adimensionnels (flux réduit)	0
$\mathcal{H}$	: Rapport d'enthalpie (h_g/h_p)	0
cf	: Coefficient de frottement	0
St	: Nombre de Stanton	0
A, A'	: Constantes	0

l'indice p se rapporte aux grandeurs pariétales

l'indice g se rapporte aux grandeurs définies pour $y = R$ ou à l'extérieur de la couche limite

l'indice m se rapporte aux grandeurs de mélange

I - INTRODUCTION

Les connaissances relatives aux écoulements turbulents sont dues, pour l'essentiel, à l'expérience. L'analyse dimensionnelle permet certes d'obtenir des formules de corrélation, mais il n'a pas été possible d'établir une théorie de portée plus générale fondée sur les équations de Navier-Stokes. Cette impossibilité résulte de l'indétermination du système d'équations relatives aux grandeurs moyennes ; pour lever cette indétermination, il est nécessaire d'introduire une hypothèse supplémentaire dite de fermeture. Généralement on admet l'existence de diffusivités turbulentes mais un tel schéma n'est fondé sur aucune base physique sérieuse.

La présente étude repose sur le fait que tout écoulement turbulent, en conduite ou de couche limite, se compose de deux régions ayant des dimensions et des propriétés différentes. La première de ces régions est située au voisinage immédiat de la paroi et son épaisseur peut être caractérisée par la longueur : ν_p/U_p^* (U_p^* : vitesse de frottement).

Dans cette région, la tension visqueuse est du même ordre de grandeur que la tension totale. Au contraire, dans la partie restante de l'écoulement qui constitue la seconde région, c'est la tension d'origine turbulente qui est de l'ordre de grandeur de la tension totale. Du point de vue dimension, cette région peut être caractérisée par R rayon de la conduite ou épaisseur de la couche limite.

A partir des deux longueurs précédemment définies, il est possible de construire un nombre adimensionnel $R^* = \frac{R U_p^*}{\nu_p}$ qui tend vers l'infini lorsque le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement moyen tend lui-même vers l'infini.

Il paraît dès lors naturel de rechercher les différentes lois (profils de vitesse et d'enthalpie, loi de frottement et de transfert thermique) sous forme de développements asymptotiques en fonction du paramètre R^* .

Les écoulements turbulents incompressibles ont été étudiés par Yajnik [1] qui, malheureusement, n'a pas fait preuve de suffisamment de rigueur dans sa démonstration. Il déduit en effet de la seule condition que τ_{xy1} (tension réduite) tende vers une constante lorsque η (ordonnée réduite) tend vers l'infini, le comportement suivant pour τ_{xy1} :

$$\tau_{xy1} \sim a + \frac{b}{\eta}$$

Or, il est possible de remplacer la fonction $1/\eta$ par n'importe quelle autre fonction de η tendant vers zéro lorsque η tend vers l'infini. Le reste de la démonstration reposant de manière totale sur ce développement, l'ensemble des conclusions de cet auteur est donc à priori non fondé.

La présente étude se compose de trois parties, respectivement consacrées, la première à la définition de certains termes et notations utilisés en théorie des perturbations et les deuxième et troisième parties aux écoulements turbulents à propriétés physiques constantes et variables, à gradient de pression négligeable.

II - DÉFINITIONS

L'utilisation des développements asymptotiques nécessite les définitions d'un certain nombre de termes et de notations qui vont être donnés ici :

- $y = o(z)$ $x \rightarrow a$
lorsque x tend vers a , le rapport y/z tend vers zéro ;
- $y = O(z)$ $x \rightarrow a$
lorsque x tend vers a , le rapport y/z tend vers une constante.

Développement asymptotique

On appelle développement asymptotique d'une fonction $f(\varepsilon)$ pour ε tendant vers ε_0 , une suite de fonctions $\omega_0(\varepsilon) \dots \omega_n(\varepsilon)$ vérifiant pour toute valeur de m les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_{m+1}(\varepsilon) &= o(\omega_m(\varepsilon)) & \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \\ f(\varepsilon) - \sum_0^m \omega_n(\varepsilon) &= o(\omega_m(\varepsilon)) & \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0\end{aligned}$$

Développement asymptotique régulier

Une fonction $f(x, \varepsilon)$ définie pour $x \in [a, b]$ et $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ admet un développement asymptotique régulier par rapport au paramètre ε lorsque celui-ci tend vers ε_0 , s'il existe une suite de couples de fonctions $f_n(x)$, $\omega_n(\varepsilon)$ telle que pour toute valeur de $x \in [a, b]$ et toute valeur de m , on ait :

$$\begin{aligned}\omega_{m+1}(\varepsilon) &= o(\omega_m(\varepsilon)) & \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \\ f(x, \varepsilon) - \sum_0^m \omega_n(\varepsilon) f_n(x) &= o(\omega_m(\varepsilon)) & \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0\end{aligned}$$

Problème de perturbation singulière

Lorsque, pour une fonction $f(x, \varepsilon)$, $x \in [a, b] = D$, $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, il n'existe pas de développement asymptotique régulier, on se trouve confronté à un problème dit de perturbation singulière. En règle générale, il existe alors pour la fonction $f(x, \varepsilon)$ N développements asymptotiques. Le n ème développement asymptotique est défini par l'existence des grandeurs suivantes :

- une suite de couples de fonctions $f_1^n(t)$, $\omega_1^n(\varepsilon)$
- une fonction $\Delta_n(\varepsilon)$
- une fonction $x_n(\varepsilon)$
- un intervalle $D_n = [a_n, b_n]$ *

$$\begin{aligned}a_1 &= a & a_{n+1} &> a_n \\ b_N &= b & b_{n+1} &> b_n\end{aligned}$$

tels que pour $x \in D_n$ et $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ la suite $f_1^n\left(\frac{x - x_n}{\Delta_n(\varepsilon)}\right)$, $\omega_1^n(\varepsilon)$ forme un développement régulier de la fonction $f(x, \varepsilon)$.

De plus, les intervalles D_n vérifient la condition suivante $D_n \cap D_{n+1} \neq \emptyset$, qui traduit l'existence d'intervalles sur lesquels les développements se raccordent deux à deux.

* a_n et b_n peuvent être fonction de ε .

III - ÉCOULEMENTS TURBULENTS A PROPRIÉTÉS PHYSIQUES CONSTANTES

III-1 - CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Dans la pratique, la technique des développements asymptotiques est toujours utilisée en liaison avec une équation différentielle ou de toute autre nature, vérifiée par la grandeur dont on recherche un ou des développements asymptotiques. Dans le cas présent, on ne dispose pas d'une telle équation ; aussi convient-il donc de suppléer à cette absence par des hypothèses conformes aux résultats expérimentaux,

Désignant par U^+ la vitesse réduite U/U^* et par y l'ordonnée réduite $y \frac{U^*}{V}$, on admettra par hypothèse les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} - \lim_{\substack{y^+ \text{ fixe} \\ R^* \rightarrow \infty}} U^+ (y^+, R^*) &= f(y^+) \\ - \lim_{\substack{\frac{y^+}{R^*} \text{ fixe} \\ R^* \rightarrow \infty}} U^+ (y^+, R^*) - U^+ (R^*, R^*) &= F\left(\frac{y^+}{R^*}\right) \end{aligned}$$

Ces deux relations traduisent en termes mathématiques les deux lois connues sous le nom de loi de vitesse de paroi et loi de vitesse déficitaire.

S'étant fixé comme but la description des lois de vitesse et de frottement sous forme de développements asymptotiques en fonction du paramètre adimensionnel R^* , il convient, tout d'abord, de déterminer le caractère régulier ou singulier du problème de perturbation auquel on est confronté.

III-2 - ESSAI D'OBTENTION D'UN DÉVELOPPEMENT RÉGULIER DE LA VITESSE

En raison de la forme des lois de vitesse de paroi et déficitaire, on est conduit à rechercher pour la vitesse un développement régulier de l'un ou l'autre type suivant :

$$\text{TYPE A : } U^+(y^+, R^*) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y^+) \omega_n(R^*) + o(\omega_n(R^*)) \quad y^+ \in [0, R^*]$$

$$\text{TYPE B : } U^+(y^+, R^*) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(\frac{y^+}{R^*}\right) \Omega_n(R^*) + o(\Omega_n(R^*)) \quad \frac{y^+}{R^*} \in [0, 1]$$

$F_0(y^+)$, $F_0\left(\frac{y^+}{R^*}\right)$ étant à priori différents de zéro.

Dans ce qui suit, ces deux types de développements vont être étudiés et il sera montré qu'ils ne sauraient représenter correctement la loi de vitesse.

III-2-a - Développement asymptotique de type A

$$U^+(y^+, R) = \sum_0 \omega_n(R) f_n(y^+) + o(\omega_n(R))$$

Les lois de vitesse de paroi et déficitaire entraînent les deux relations suivantes :

$$\omega_0(R^*) f_0(y^+) + o(\omega_0) = f(y^+) + o(1)$$

$$\omega_0(R^*) [f_0(y^+) - f_0(R^*)] + o(\omega_0) = F\left(\frac{y^+}{R^*}\right) + o(1)$$

De la première de ces deux relations, compte tenu du fait que $f_0(y^+)$ et $f(y^+)$ ne sauraient être identiquement nuls, on déduit aisément que :

$$\omega_0(R^*) = 1 \qquad f_0(y^+) = f(y^+)$$

Dans ces conditions la relation déduite de la loi de vitesse déficitaire s'écrit :

$$f(y^+) - f(R^*) = F\left(\frac{y^+}{R^*}\right) + o(1) \qquad R^* \rightarrow \infty \quad y^+ \in [0, R^*]$$

Par ailleurs, on sait que la vitesse $U^+(y^+, R^*)$ s'annule pour $y^+ = 0$, ce qui entraîne $f(0) = 0$.

$$\text{Soit} \quad F(0) = -f(R^*) + o(1)$$

$$f(R^*) = F(0) + o(1) \qquad R \rightarrow \infty$$

$$\text{Soit} \quad F(t) = f(tR^*) - f(R^*) + o(1)$$

$$F(t) = o(1) \qquad R^* \rightarrow \infty \quad t \text{ fini}$$

$$F(t) = 0$$

Ce résultat étant en contradiction avec la loi de vitesse déficitaire, on est conduit à admettre qu'il n'existe pas de développement du type A pour la vitesse.

III-2-b - Développement asymptotique de type B

$$U^+(y^+, R^*) = \sum_0^n \Omega_n(R^*) F_n\left(\frac{y^+}{R^*}\right) + o(\Omega_n(R^*))$$

Compte-tenu de la loi de vitesse déficitaire, on obtient la relation suivante :

$$\Omega_0(R^*) [F_0(t) - F_0(1) + o(1)] = F(t) + o(1)$$

$F(t)$ n'étant pas identiquement nul, cette relation est vérifiée par l'un ou l'autre système suivant :

$$\Omega_0(R) = 1 \qquad F_0(t) - F_0(1) = F(t)$$

$$\frac{1}{\Omega_0(R)} = o(1) \qquad F_0(t) = F_0(1)$$

Dans le premier cas, la loi de paroi implique :

$$f(y^+) = F_0\left(\frac{y^+}{R^*}\right) + o(1)$$

Soit :

$$F(t) = f(tR) - f(R) + o(1)$$

Cette relation a déjà été étudiée (paragraphe III-2-a) et conduit à une impossibilité.

(Il est à noter que $\varphi(R^*)$ et $\sqrt{\frac{2}{cf}}$ sont liés par la relation $\sqrt{\frac{2}{cf}} = \varphi(R^*) + o(1)$)

Il est possible de montrer, voir Kaplun [2] que ces deux développements ont des domaines de validité dont les bornes sont fonction du paramètre R^* .

Plus précisément, les développements précédents sont valides respectivement pour :

$$y^+ \in [0, \Sigma(R^*)]$$

$$\frac{y^+}{R^*} \in \left[\frac{\sigma(R^*)}{R^*}, 1 \right]$$

Les fonctions $\sigma(R^*)$ et $\Sigma(R^*)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\lim_{R^* \rightarrow \infty} \Sigma(R^*) = \infty \qquad \lim_{R^* \rightarrow \infty} \frac{\sigma(R^*)}{R^*} = 0$$

Ces résultats ne permettent pas de démontrer l'existence pour les deux développements asymptotiques considérés d'une zone de raccordement, existence qu'on est amené à admettre. Plus précisément, on supposera qu'il existe deux constantes α_1 et α_2 telles que

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

$$\sigma(R^*) < R^{*\alpha_1} \qquad \Sigma(R) > R^{*\alpha_2}$$

Cette hypothèse a pour conséquence la relation suivante :

$$f(R^{*\alpha}) = \varphi(R^*) + F(R^{*1-\alpha}) + o(1) \qquad \begin{matrix} R^* \rightarrow \infty \\ \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \end{matrix}$$

III-4 - LOIS DE VITESSE ET DE FROTTEMENT

Pour obtenir les lois de vitesse et de frottement, il convient de résoudre l'équation fonctionnelle précédente. Posant :

$$f(x) = \bar{f}(\log x)$$

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(\log x)$$

$$F(x) = \bar{F}(\log x)$$

$$z = \log R^*$$

cette équation s'écrit encore :

$$\bar{f}(\alpha z) = \bar{\varphi}(z) + \bar{F}[(1 - \alpha)z] + o(1) \qquad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

Soit en changeant α en β , $\alpha_1 \leq \alpha \leq \beta \leq \alpha_2$

$$f(\beta z) = \varphi(z) + F[(1 - \beta)z] + o(1)$$

Par différence avec la relation précédente, on obtient :

$$\bar{f}(\beta z) - \bar{f}(\alpha z) = \bar{F}[(1 - \beta) z] - \bar{F}[(1 - \alpha) z] + o(1)$$

Cette relation s'écrit encore en changeant z en λz , α en α/λ et β en β/λ

$$\bar{f}(\beta z) - \bar{f}(\alpha z) = \bar{F}[(1 - \beta) z] - \bar{F}[(1 - \alpha) z] + o(1)$$

Les paramètres α , β et λ vérifient les conditions suivantes :

$$1 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$\lambda_2 \alpha_1 < \alpha < \beta < \alpha_2$$

Il est possible par différence d'éliminer le terme $\bar{f}(\beta z) - \bar{f}(\alpha z)$ entre les deux relations précédentes, ce qui conduit à :

$$\bar{F}[(\lambda - \beta) z] - \bar{F}[(\lambda - \alpha) z] - \bar{F}[(1 - \beta) z] + \bar{F}[(1 - \alpha) z] = o(1)$$

Soit
$$z^2 \int_1^\lambda ds \int_\alpha^\beta \bar{F}''[(s - t) z] dt = o(1)$$

Cette dernière relation entraîne qu'il existe une valeur de θ dépendant de α , β , λ et z telle que :

$$(\lambda - 1) (\beta - \alpha) z^2 \bar{F}''(\theta z) = o(1) \quad 1 + \alpha < \theta < \lambda + \beta$$

De cette relation découle les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 \bar{F}''(z) &= o(1) \\ \bar{F}(z) &= Az + o(\log z) \end{aligned} \quad z \rightarrow \infty$$

On démontrerait de la même manière des relations analogues pour les fonctions f et φ . Revenant aux fonctions f , φ et F on obtient finalement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(y^+) &= A \log y^+ + o(\log \log y^+) & y^+ \rightarrow \infty \\ \sqrt{\frac{2}{cf}} &= A \log R^* + o(\log \log R^*) & R^* \rightarrow \infty \\ F\left(\frac{y^+}{R^*}\right) &= A \log\left(\frac{y^+}{R^*}\right) + o\left(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right| \right) & \frac{y^+}{R^*} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

III-5 - LOIS D'ENTHALPIE ET DE TRANSFERT THERMIQUE

L'étude des lois d'enthalpie et de transfert thermique suit un cheminement logique identique à celui de l'étude des lois de vitesse et de frottement ; en conséquence, seules les grandes lignes en sont données ci-dessous.

On définit l'enthalpie réduite h^+ par la relation :

$$h^+ = \frac{h - h_p}{h^*}$$

où h^* qui désigne "l'enthalpie de frottement" est le rapport :

$$\frac{q_p}{\rho U^*}$$

Outre le paramètre adimensionnel R^* , la loi de variation de l'enthalpie réduite h^* en fonction de l'ordonnée réduite y^* , fait intervenir le nombre de Prandtl et se formule comme suit :

$$h^* = h^*(y^*, R^*, Pr)$$

Les lois d'enthalpie de paroi et d'enthalpie déficitaire se formulent de la façon suivante :

$$\lim_{R^* \rightarrow \infty} h^*(y^*, R^*, Pr) = g(y^*, Pr) \quad y^* \in [0, y_0^*]$$

$$\lim_{R^* \rightarrow \infty} h^*(y^*, R^*, Pr) - h(R^*, R^*, Pr) = G\left(\frac{y^*}{R^*}, Pr\right) \quad \frac{y^*}{R^*} \in [t_0, 1]$$

L'utilisation de la technique des développements asymptotiques raccordés conduit alors aux trois relations fondamentales :

$$g(y^*, Pr) = A' \log y^* + o(\log \log y^*) \quad y^* \rightarrow \infty$$

$$\frac{\sqrt{cf}/2}{st} = A' \log R^* + o(\log \log R^*) \quad R^* \rightarrow \infty$$

$$G\left(\frac{y^*}{R^*}, Pr\right) = A' \log \frac{y^*}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^*}{R^*} \right| \right) \quad \frac{y^*}{R^*} \rightarrow 0$$

III-6 - CONCLUSION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS A PROPRIÉTÉS PHYSIQUES CONSTANTES

Le comportement asymptotique des différentes lois fondamentales des écoulements turbulents à propriétés physiques constantes est décrit par les relations suivantes, obtenues par l'emploi de la technique des développements raccordés.

Lois de vitesse et d'enthalpie de paroi

$$f(y^*) = A \log y^* + o(\log \log y^*) \quad y^* \rightarrow \infty$$

$$g(y^*) = A' \log y^* + o(\log \log y^*)$$

Lois de vitesse et d'enthalpie déficitaires

$$F\left(\frac{y^*}{R^*}\right) = A \log \frac{y^*}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^*}{R^*} \right| \right)$$

$$\frac{y^*}{R^*} \rightarrow 0$$

$$G\left(\frac{y^*}{R^*}\right) = A' \log \frac{y^*}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^*}{R^*} \right| \right)$$

Lois de frottement et de transfert thermique

$$\sqrt{\frac{2}{cf}} = A \log R^* + o(\log \log R^*)$$

$$R \rightarrow \infty$$

$$\frac{\sqrt{cf/2}}{St} = A' \log R^* + o(\log \log R^*)$$

A priori, la constante A' peut dépendre du nombre de Prandtl Pr , mais l'expérience semble prouver qu'il n'en est rien.

La forme générale des lois précédentes est la suivante :

$$\Phi(x) = c t \log x + \theta(x)$$

$$\theta(x) = o(\log \log x)$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \infty \end{array}$$

Elle est en accord avec les résultats expérimentaux qui toutefois suggèrent un résultat plus précis correspondant à :

$$\theta(x) = O(1)$$

IV - ÉCOULEMENTS TURBULENTS A PROPRIÉTÉS PHYSIQUES VARIABLES

IV-1 - GÉNÉRALITÉS

Pour un écoulement turbulent à propriétés physiques constantes, la loi de variation de la vitesse réduite en fonction de l'ordonnée réduite dépend du paramètre $R^* = R U^* / \nu$.

Lorsque les propriétés du fluide varient avec la température et qu'un gradient transversal important de température existe au sein de l'écoulement, les lois de vitesse et d'enthalpie réduites en fonction d'une ordonnée réduite dépendent en outre d'un paramètre caractéristique du gradient de température, des paramètres caractéristiques des lois de variation des propriétés physiques et du nombre de Prandtl pariétal.

Par hypothèse la présente étude sera limitée au cas, d'ailleurs assez général, des fluides dont les propriétés physiques varient comme des puissances de l'enthalpie :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n_p} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n_\mu} \quad \frac{k}{k_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n_k} \quad \frac{C_p}{C_{p0}} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n_{Cp}}$$

Dès lors les paramètres caractéristiques des lois de variation des propriétés physiques sont n_p , n_μ , n_k et n_{cp} qui seront désormais symbolisés par le vecteur N .

Par ailleurs, les variations d'enthalpie à travers l'écoulement peuvent être caractérisées par le rapport des enthalpies h_g et h_p $\mathcal{H} = h_g/h_p$.

Désignant par $U_p^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$ et $h_p^* = \frac{q_p}{\rho_p U_p^*}$ les vitesses et enthalpie de frottement pariétales la forme générale des lois de vitesse et d'enthalpie est la suivante :

$$\frac{U}{U_p^*} = U \left(\frac{y}{y_p} \frac{U_p^*}{U_p^*}, \frac{R}{R_p} \frac{U_p^*}{U_p^*}, \beta, \mathcal{H}, N, Pr_p \right)$$

$$\frac{h - h_p}{h_p^*} = H \left(\frac{y}{y_p} \frac{U_p^*}{U_p^*}, \frac{R}{R_p} \frac{U_p^*}{U_p^*}, \mathcal{H}, N, Pr_p \right)$$

IV-2 - LOIS DE VITESSE ET D'ENTHALPIE DE PAROI ET DÉFICITAIRES

En écoulement turbulent à propriétés physiques variables, faute d'expérience, on ignore s'il existe des lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et déficitaires analogues à celles obtenues expérimentalement pour la vitesse dans le cas d'écoulement à propriétés physiques constantes.

Par hypothèse, on admettra l'existence de telles lois qui devront vérifier les principes suivants :

- les lois de vitesse et d'enthalpie pariétale sont des relations entre grandeurs caractéristiques de la région de l'écoulement située près de la paroi ;
- les lois de vitesse et d'enthalpie déficitaires sont des relations entre grandeurs caractéristiques de la région de l'écoulement éloignée de la paroi.

IV-2-1 - Lois de vitesse et d'enthalpie de paroi

Les lois de vitesse et d'enthalpie s'écrivent de manière générale sous la forme suivante :

$$\frac{U}{U_p^*} = U(y^+, R^*, \mathcal{H}, N, Pr_p)$$

$$\frac{h - h_p}{h_p^*} = H(y^+, R^*, \mathcal{H}, N, Pr_p)$$

Ces lois font intervenir deux grandeurs $\mathcal{H}$ et R^* qui ne sont pas définies à partir de paramètres caractérisant l'écoulement au voisinage de la paroi. Les limites de :

$$\frac{U}{U_p^*} \quad \text{et} \quad \frac{h - h_p}{h_p^*}$$

ne sauraient, à priori, être définies que si une certaine relation entre R^* et $\mathcal{H}$ est spécifiée.

Désignant par β^* une grandeur adimensionnelle telle que :

$$- \beta^* = \beta^*(R^*, \mathcal{R})$$

- β^* soit définie à partir des seuls paramètres régissant l'écoulement au voisinage de la paroi, les lois de vitesse et d'enthalpie de paroi s'écrivent sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{R^* \rightarrow \infty} \frac{U}{U_p^*} = f^*(y^+, \beta^*, N, Pr_p) \\ \beta^*, y^+ \text{ fixés} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{R^* \rightarrow \infty} \frac{h - h_p}{h_p^*} = g^*(y^+, \beta^*, N, Pr) \\ \beta^*, y^+ \text{ fixés} \end{array} \right.$$

Lorsque β^* tend vers zéro, les fonctions $f^*(y^+, \beta^*, N, Pr_p)$ et $g^*(y^+, \beta^*, N, Pr_p)$ ont des limites finies différentes de zéro si y^+ est lui-même différent de zéro. On est en effet alors ramené au cas des écoulements turbulents à propriétés physiques constantes.

De plus, il est à priori légitime de supposer que les fonctions $f^*(y^+, \beta^*, N, Pr_p)$ et $g^*(y^+, \beta^*, N, Pr_p)$ sont continues par rapport à la variable β^* . Ces deux faits ont pour conséquence que :

$$\begin{array}{lll} f(y^+, \beta^*, N, Pr_p) = 0(1) & \beta^* \rightarrow 0 & y^+ \neq 0 \\ g(y^+, \beta^*, N, Pr_p) = 0(1) & \beta^* \rightarrow 0 & y^+ \neq 0 \end{array}$$

Le choix du paramètre β^* comporte un grand arbitraire.

On peut par exemple prendre $\beta^* = \frac{h_p^*}{h_p}$, soit : $\beta^* = (\mathcal{R} - 1) \mathcal{R}^{hp/2} \frac{St}{\sqrt{cf/2}}$. Les nombres de Stanton St et le coefficient de frottement cf étant à priori fonctions des seules grandeurs $\mathcal{R}$ et R^* , il en est de même de β^* . Il convient de noter ici que tout multiple de h_p^*/h_p aurait pu être choisi comme valeur de β^* .

IV-2-2 - Lois de vitesse et d'enthalpie déficitaires

Les lois générales de vitesse et d'enthalpie sous forme réduite, ont été définies par les relations suivantes :

$$\frac{U}{U_p^*} = U(y^+, R^*, \mathcal{R}, N, Pr_p)$$

$$\frac{h - h_p}{h_p^*} = H(y^+, R^*, \mathcal{R}, N, Pr_p)$$

Une première remarque s'impose, U_p^* et h_p^* sont définis à partir de paramètres pariétaux, il convient donc de remplacer ces grandeurs par d'autres grandeurs définies dans la région éloignée de la paroi. Il est à noter que la tension réduite τ/τ_p et le flux ther-

mique réduit q/q_p^* sont, dans le cas d'écoulement à propriétés physiques constantes, fonction de y^+/R^* , ce qui a pour conséquence que τ_p et q_p sont, dans ce cas, des grandeurs caractéristiques de la région éloignée de la paroi. On admettra qu'il en est de même pour un écoulement à propriétés physiques variables. Ceci a pour conséquence qu'au lieu et place de U_p et h_p^* , on peut utiliser $U_g^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_g}}$ et $h_g^* = \frac{q_p}{\rho_g U_g^*}$.

Pour les mêmes raisons h_p sera remplacé par h_g , U par $U - U_g$ et Pr_p par Pr_g .

De même que pour les lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et pour les mêmes raisons, il convient de rechercher un paramètre γ^* fonction de R^* et $\mathcal{R}$ et défini à partir des seules grandeurs caractéristiques de la zone éloignée de la paroi.

Par analogie avec la définition de β^* , on prendra γ^* sous la forme suivante :

$$\gamma^* = \frac{h_g}{h_g^*} \quad \text{soit} \quad \gamma^* = \frac{St}{\sqrt{cf/2}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}} \right)$$

Dès lors, les lois de vitesse et d'enthalpie déficitaires s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{R^* \rightarrow \infty} \frac{U - U_g}{U_g^*} = F^* \left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma^*, N, Pr_g \right) \\ R^* \rightarrow \infty \\ \gamma, \frac{y^+}{R^*} \text{ fini} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{R^* \rightarrow \infty} \frac{h - h_g}{h_g^*} = G^* \left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma^*, N, Pr_g \right) \\ R^* \rightarrow \infty \\ \gamma, \frac{y^+}{R^*} \text{ fini} \end{array} \right.$$

Pour des raisons identiques à celles évoquées dans le cas des fonctions f^* et y^* , les fonctions F^* et G^* vérifieront les relations suivantes :

$$F^* \left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma^*, N, Pr_g \right) = 0(1) \quad \gamma^* \rightarrow 0 \quad \frac{y^+}{R^*} \neq 0$$

$$G^* \left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma^*, N, Pr_g \right) = 0(1) \quad \gamma^* \rightarrow 0 \quad \frac{y^+}{R^*} \neq 0$$

IV-2-3 - Lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et déficitaires normalisées

Pour des raisons de commodité de calcul, il a paru intéressant d'introduire les deux nouvelles fonctions U^+ et h^+ définies comme suit :

$$U^+ = \int_0^U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_p}} du \quad h^+ = \int_0^h \frac{\sqrt{\rho \tau_p}}{q_p} dh$$

Relativement à ces deux nouvelles fonctions, les lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et déficitaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} \lim_{R^* \rightarrow \infty} U^+ &= f(y^+, \beta) & \lim_{R^* \rightarrow \infty} h^+ - \frac{1}{\beta} &= g(y^+, \beta) & \beta &= \frac{1}{h_p^+} \\ y^+, \beta \text{ fixés} & & y^+, \beta \text{ fixés} & & & \\ \lim_{R^* \rightarrow \infty} U^+ - U_g^+ &= F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) & \lim_{R^* \rightarrow \infty} h^+ - \frac{1}{\gamma} &= G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) & \gamma &= \frac{1}{h_g^+} \\ \frac{y^+}{R^*}, \gamma \text{ fixés} & & \frac{y^+}{R^*}, \gamma \text{ fixés} & & & \end{aligned}$$

Remarque : Les paramètres N , Pr_p et Pr_g seront dorénavant omis, sauf nécessité contraire.

IV-3 - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

De même que pour les écoulements turbulents à propriétés physiques constantes, on admettra l'existence pour la vitesse et l'enthalpie de deux développements asymptotiques respectivement valables pour y^+ et y^+/R^* fixés :

$$\begin{aligned} U^+ &= \sum_0^{\infty} \omega_n^I(R^*, \beta) f_n(y^+, \beta) + o(\omega_m^I(R^*, \beta)) & \beta, y^+ \text{ fixés} \\ h^+ &= \sum_0^{\infty} \omega_n^{II}(R^*, \beta) g_n(y^+, \beta) + o(\omega_m^{II}(R^*, \beta)) & R^* \rightarrow \infty \\ U^+ &= \sum_0^{\infty} \Omega_n^I(R^*, \gamma) F_n\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) + o(\Omega_m^I(R^*, \gamma)) & \gamma, \frac{y^+}{R^*} \text{ fixés} \\ h^+ &= \sum_0^{\infty} \Omega_n^{II}(R^*, \gamma) G_n\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) + o(\Omega_m^{II}(R^*, \gamma)) & R^* \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Les lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et déficitaires entraînent immédiatement que :

$$\begin{aligned} U^+ &= f(y^+, \beta) + o(1) \\ h^+ &= \frac{1}{\beta} + g(y^+, \beta) + o(1) & y^+, \beta \text{ fixés} - R^* \rightarrow \infty \\ U^+ &= U_g^+ + F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) + o(1) \\ h^+ &= \frac{1}{\gamma} + G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) + o(1) & \frac{y^+}{R^*}, \gamma \text{ fixés} - R^* \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Les développements asymptotiques précédents seront l'un et l'autre valables lorsque R^* tend vers l'infini et que β et γ sont bornés.

IV-4 - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

Pour déterminer les diverses fonctions $f(y^+, \beta)$, $g(y^+, \beta)$, $F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right)$, $R^*(\beta, \gamma)$ et $U_g^*(\beta, \gamma)$ ou plus exactement leurs développements asymptotiques, trois cas correspondant respectivement à β constant, γ constant et β/γ constant seront considérés.

IV-4-a - β constant, $R^* \rightarrow \infty$

$$\beta = \frac{St}{\sqrt{cf/2}} \left(1 + \frac{n_p}{2} \right) \mathcal{H}^{n_p/2} (\mathcal{H} - 1)$$

Lorsque le paramètre R^* tend vers l'infini, il est légitime d'admettre que le nombre adimensionnel $St/\sqrt{cf/2}$ tende vers zéro.

Pour que β puisse rester constant, il est alors nécessaire que $\mathcal{H}^{n_p/2}(\mathcal{H} - 1)$ tende vers l'infini. L'exposant n_p de la loi de variation de la masse volumique en fonction de l'enthalpie est négatif, la condition précédente entraîne l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H} \rightarrow 0 & \gamma \rightarrow -\infty & \beta < 0 \\ \mathcal{H} \rightarrow \infty & \gamma \rightarrow 0^+ & \beta > 0 \end{array}$$

L'étude se limitera au second cas, mais on admettra pour des raisons de continuité que les conclusions auxquelles elle conduit pour les fonctions $f(y^+, \beta)$ et $g(y^+, \beta)$ sont également valables pour $\beta < 0$.

$$U^+ = f(y^+, \beta) + o(1)$$

$$y^+ \in [0, y_0^+] \quad R^* \rightarrow \infty \quad \beta \text{ fixe}$$

$$h^+ = \frac{1}{\beta} + g(y^+, \beta) + o(1)$$

$$U^+ = U_g^+ + F\left(\frac{y^+}{R^*}, 0\right) + o(1)$$

$$\frac{y^+}{R^*} \in [t_0, 1]$$

$$h^+ = \frac{1}{\gamma} + G\left(\frac{y^+}{R^*}, 0\right) + o(1)$$

$$R^* \rightarrow \infty \quad \beta \text{ fixe}$$

Les deux développements ci-dessus résultent simplement du fait que les fonctions $F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right)$ et $G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right)$ sont supposées continues par rapport à la variable γ pour $\gamma = 0$ et $\frac{y^+}{R^*} \in [t_0, 1]$.

De même que dans le cas des écoulements turbulents à propriétés physiques constantes, il est naturel d'admettre l'existence pour les deux développements de U^+ et h^+ , d'un domaine de validité commune défini par :

$$y^+ \in [R^{*\alpha_1}, R^{*\alpha_2}] \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

Soit :

$$\begin{aligned} f(R^{*\alpha}, \beta) &= U_g^+ + F(R^{*(\alpha-1)}, 0) + o(1) \\ \alpha &\in [\alpha_1, \alpha_2] \\ R^* &\rightarrow \infty \\ \frac{1}{\beta} + g(R^{*\alpha}, \beta) &= \frac{1}{\gamma} + G(R^{*(\alpha-1)}, 0) + o(1) \end{aligned}$$

Cette dernière relation, compte tenu du développement de $G\left(\frac{y^+}{R^*}, 0\right)$ précédemment déterminé s'écrit :

$$g(R^{*\alpha}, \beta) = \frac{1}{\gamma} + A'(\alpha' - 1) \log R^* + o(\log \log R^*)$$

Soit par différence :

$$g(R^{*\alpha}, \beta) - g(R^{*\alpha'}, \beta) = A'(\alpha' - \alpha) \log R^* + o(\log \log R^*)$$

$$\int_{\alpha'}^{\alpha} \log R^* \left[R^{*t} \frac{\partial g}{\partial y^+}(R^{*t}, \beta) - A' \right] dt = o(\log \log R^*)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y^+}(y^+, \beta) - \frac{A'}{y^+} = o\left(\frac{\log(\log y^+)}{y^+ \log y^+}\right)$$

Soit :

$$g(y^+, \beta) = A' \log y^+ + o(\log \log y^+)$$

Des calculs en tous points identiques et portant sur la relation relative à la vitesse réduite U^+ conduiraient au résultat suivant :

$$f(y^+, \beta) = A \log y^+ + o(\log \log y^+)$$

IV-4-b - γ constant, $R^* \rightarrow \infty$

La double condition, suivant laquelle γ est constant et R^* tend vers l'infini, entraîne que $\mathcal{H}$ et β tendent vers zéro et que β et γ soient négatifs.

Grâce à une démonstration semblable à celle déjà développée dans le paragraphe IV-4-a, on est conduit aux deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) &= A \log \frac{y^+}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right| \right) & \gamma \text{ fixe} \\ G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma\right) &= A' \log \frac{y^+}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right| \right) & \gamma \text{ fixe} \end{aligned}$$

$\frac{y^+}{R^*} \rightarrow 0$

IV-4-c - β/γ constant, $R^* \rightarrow \infty$

Par définition de β et γ , on a :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \mathcal{H}^{1+n} \rho^{1/2}$$

Le cas étudié correspond donc à un écoulement turbulent tel que le rapport h_g/h_p soit fini.

Dans la zone de validité commune des développements asymptotiques, on a alors les deux relations suivantes :

$$A \log y^+ + o(\log \log y^+) = A \log \frac{y^+}{R^*} + U_g^+ + o(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right|)$$

$$\frac{1}{\beta} + A' \log y^+ + o(\log \log y^+) = A' \log \left(\frac{y^+}{R^*} \right) + \frac{1}{\gamma} + o(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right|)$$

$$y = R^{*\alpha} \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

Soit :

$$U_g^+ = A \log R^* + o(\log \log R^*)$$

$$h_p^+ - h_g^+ = A' \log R^* + o(\log \log R^*)$$

Les lois générales de vitesse et d'enthalpie s'établissent donc comme suit :

Loi de vitesse et d'enthalpie de paroi

$$\begin{aligned} f(y^+, N, Pr_p) &= A \log y^+ + o(\log \log y^+) \\ g(y^+, N, Pr_p) &= A' \log y^+ + o(\log \log y^+) \end{aligned} \quad y^+ \rightarrow \infty$$

Loi de vitesse et d'enthalpie déficitaires

$$\begin{aligned} F\left(\frac{y^+}{R^*}, N, Pr_g\right) &= A \log \frac{y^+}{R^*} + o(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right|) \\ G\left(\frac{y^+}{R^*}, N, Pr_g\right) &= A' \log \frac{y^+}{R^*} + o(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right|) \end{aligned} \quad \frac{y^+}{R^*} \rightarrow 0$$

$$A = A(N, Pr_g) \quad A' = A'(N, Pr_g)$$

Les constantes A et A' dépendent donc a priori du seul paramètre N caractéristique des lois de variation des propriétés physiques en fonction de l'enthalpie.

Lorsque les variations des propriétés physiques sont négligeables ($\mathcal{R}$ voisin de 1), N n'est pas un paramètre caractéristique de l'écoulement ; il résulte de ceci que A et A' sont des constantes universelles.

IV-5 - LOIS DE FROTTEMENT ET DE TRANSFERT THERMIQUE

Les lois de frottement et de transfert thermique sont implicitement fournies par les relations précédemment établies.

$$\begin{aligned} U_g^+ &= A \log R^* + o(\log \log R^*) \\ h_g^+ - h_p^+ &= A' \log R^* + o(\log \log R^*) \end{aligned} \quad R^* \rightarrow \infty$$

Définissant cf_g et St_g par les relations suivantes :

$$cf_g = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_g U_g^2} \quad St_g = \frac{q_p}{\rho_g U_g (h_g - h_p)}$$

on se propose de déterminer deux relations liant d'une part cf_g , R^* et $\mathcal{H}$, d'autre part cf_g , St_g et $\mathcal{H}$

Pour obtenir les lois de frottement et de transfert thermique usuelles, il convient d'examiner séparément le cas des écoulements en conduite et le cas des couches limites.

IV-5-a - Écoulements en tuyaux

Les paramètres caractéristiques de l'écoulement sont alors le coefficient de frottement cf , les nombres de Stanton et de Reynolds Re définis comme suit :

$$cf = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_m U_m^2} \quad St = \frac{q_p}{\rho_m U_m (h_m - h_p)} \quad Re = \frac{R U_m \rho_m}{\mu_m}$$

L'indice m désigne les grandeurs de mélange définies par les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_m U_m S &= \int_S \rho U \, ds \\ \rho_m U_m h_m S &= \int_S \rho U h \, ds \end{aligned} \quad (S \text{ section de la conduite})$$

Lorsque le nombre de Reynolds Re et par conséquent R^* tendent vers l'infini, dans tout domaine de l'écoulement excluant la paroi U , ρ et h tendent respectivement vers U_g , ρ_g et h_g .

On a donc :

$$U_m \rho_m \sim U_g \rho_g \quad U_m \rho_m h_m \sim U_g \rho_g h_g$$

Soit :

$$cf \sim cf_g \quad St \sim St_g \quad Re \sim R^* \sqrt{\frac{2}{cf}} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p}} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_q}}$$

Un calcul algébrique simple montre tout d'abord que :

$$h_g^+ - h_p^+ = \frac{\sqrt{cf_g/2}}{St_g} \times \frac{1}{\sqrt{F_c} (\mathcal{H})}$$

avec :

$$F_c(x) = \left[\frac{(1 + n_p/2) x^{n_p/2} (x - 1)}{x^{1+n_p/2} - 1} \right]^2$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{U_g^+}{A} - \frac{h_g^+ - h_p^+}{A'} = \int_0^R \sqrt{\frac{\rho}{\rho_g}} \left[\frac{1}{A} \sqrt{\frac{\rho_g}{\tau_p}} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{A'} \frac{\sqrt{\tau_p}}{q_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dy$$

La formule de la moyenne relative aux intégrales définies, entraîne qu'il existe une valeur ρ_r de ρ comprise entre ρ_p et ρ_g telle que :

$$\frac{U_g^+}{A} - \frac{h_g^+ - h_p^+}{A'} = \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_g}} \left[\frac{1}{A} \sqrt{\frac{2}{cf_g}} - \frac{1}{A'} \frac{cf_{g/2}}{St_g} \right]$$

Compte tenu des expressions de U^+ et $h^+g - h^+p$, un calcul algébrique simple conduit alors aux deux relations recherchées :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{cf_g F_c(\mathcal{H})}} &= A \log R^* + o(\log \log R^*) \\ R^* &\rightarrow \infty \\ \frac{St_g}{\frac{cf_g}{2}} &= \frac{A}{A'} + o\left(\frac{\log \log R^*}{\log R^*}\right) \end{aligned}$$

Dès lors, les lois de frottement et de transfert thermique s'établissent comme suit :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{cf F_c(\mathcal{H})}} &\sim A \log \left| \operatorname{Re} \sqrt{\frac{2}{cf}} \right| \\ \operatorname{Re} &\rightarrow \infty \\ \frac{St}{\frac{cf}{2}} &\sim \frac{A}{A'} \end{aligned}$$

IV-5-b - Écoulement de couche limite

Les paramètres caractéristiques de l'écoulement sont alors le coefficient de frottement cf , les nombres de Stanton St et de Reynolds Re définis comme suit :

$$cf = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_g U_g^2} \quad St = \frac{q_p}{\rho_g U_g (h_g - h_p)} \quad Re = \frac{\rho_g U_g X}{\nu_g}$$

X désignant l'abscisse le long de la plaque.

Le nombre de Reynolds est lié aux grandeurs définies précédemment par l'intermédiaire des deux relations suivantes :

$$dR_x = \frac{2}{cf} dR_\theta \quad \text{Loi de Von Karman}$$

$$\theta = \int_0^R \frac{\rho}{\rho_g} \frac{U}{U_g} \left(1 - \frac{U}{U_g} \right) dy$$

soit :

$$R_\theta = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{\mu_p}{\mu_g}} R^* \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_g} \frac{U}{U_g} \left(\frac{U_g - U}{U_g^*} \right) d\left(\frac{y}{R}\right)$$

Lorsque R^* tend vers l'infini, pour toute valeur finie de y/R , les fonctions $\frac{\rho}{\rho_g} \frac{U}{U_g}$ et $\frac{U_g - U}{U_g^*}$ ont respectivement pour limite 1 et $F\left(\frac{y}{R}, 0\right)$, ce qui entraîne :

$$R_\theta \sim \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{\mu_p}{\mu_g}} R^* \int_0^1 F(t, 0) dt \quad R^* \rightarrow \infty$$

Compte-tenu de l'équation de Von Karman, un calcul algébrique simple conduit à la loi de frottement :

$$\sqrt{\frac{2}{cf F_c(\mathcal{H})}} \sim A \log \left(R_x \frac{\sqrt{cf}}{2} \right) \quad R^* \rightarrow \infty$$

Par ailleurs, la loi de transfert thermique s'écrit, quant à elle :

$$\frac{St}{cf} \sim \frac{A'}{A} \quad R_x \rightarrow \infty$$

Il est à remarquer qu'au premier ordre d'approximation, les diverses lois de frottement et de transfert thermique peuvent s'écrire :

$$cf F_c(\mathcal{H}) = cf_0 (Re)$$

$$St F_c(\mathcal{H}) = St_0 (Re)$$

Ce résultat légitime, en partie du moins, la méthode proposée par Spalding et Chi [3]. De plus, il est à noter que lorsque le fluide considéré est un gaz parfait à chaleur massique constante, on retrouve pour la fonction $F_c(\mathcal{H})$ la forme conseillée par ces auteurs :

$$F_c(\mathcal{H}) = \left(\frac{\sqrt{\mathcal{H}} + 1}{2 \sqrt{\mathcal{H}}} \right)^2 \quad \mathcal{H} = \frac{T_g}{T_p}$$

V - CONCLUSION

Cette étude des écoulements turbulents à gradient de pression négligeables, fait appel à la technique des développements asymptotiques raccordés.

Les résultats obtenus pour les fluides à propriétés physiques constantes sont conformes aux résultats expérimentaux, bien que moins précis. Il est cependant possible que l'étude des termes d'ordres supérieurs des développements asymptotiques permettent d'obtenir les lois logarithmiques classiques.

Les résultats nouveaux auxquels cette étude a conduit, sont relatifs aux fluides à propriétés physiques variables. Ils peuvent se résumer par l'énoncé des lois suivantes :

Lois de vitesse et d'enthalpie de paroi

$$\lim_{\substack{R^* \rightarrow \infty \\ y^+, \beta \text{ fixés}}} \int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_p}} du = f(y^+, \beta, N, Pr_p)$$

$$f(y^+, \beta, \tilde{N}, Pr_p) = A \log y^+ + o(\log \log y^+) \quad y^+ \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\substack{R^* \rightarrow \infty \\ y^+, \beta \text{ fixés}}} \int_{h_p}^u \sqrt{\frac{\rho}{q_p} \tau_p} dh = g(y^+, \beta, N, Pr_p)$$

$$g(y^+, \beta, \tilde{N}, Pr_p) = A' \log y^+ + o(\log \log y^+) \quad y^+ \rightarrow \infty$$

Lois de vitesse et d'enthalpie déficitaires

$$\lim_{\substack{R^* \rightarrow \infty \\ \frac{y^+}{R^*}, \gamma \text{ fixés}}} \int_{u_g}^u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_p}} du = F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma, N, Pr_g\right)$$

$$F\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma, N, Pr_g\right) = A \log \frac{y^+}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right| \right) \quad \frac{y^+}{R^*} \rightarrow 0$$

$$\lim_{\substack{R^* \rightarrow \infty \\ \frac{y^+}{R^*}, \gamma \text{ fixés}}} \int_{h_g}^u \sqrt{\frac{\rho}{q_p} \tau_p} dh = G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma, N, Pr_g\right)$$

$$G\left(\frac{y^+}{R^*}, \gamma, N, Pr_g\right) = A' \log \frac{y^+}{R^*} + o\left(\log \left| \log \frac{y^+}{R^*} \right| \right) \quad \frac{y^+}{R^*} \rightarrow 0$$

Lois de frottement

$$\lim_{R^* \rightarrow \infty} \int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_p}} du = A \log R^* + o(\log \log R^*) \quad R^* \rightarrow \infty$$

$$F_c(\mathcal{R}) \text{ cf } \sim \text{cf}_0(\text{Re}) \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

$$F_c(x) = \left[\frac{x^{1+n\rho/2} - 1}{\left(1 + \frac{n\rho}{2}\right)(x-1)x^{n\rho/2}} \right]^2$$

Loi de transfert thermique

$$\lim_{R^* \rightarrow \infty} \int_{h_p}^{h_g} \frac{\sqrt{\rho} \tau_p}{q_p} dh = A' \log R^* + o(\log \log R^*) \quad R^* \rightarrow \infty$$

$$F_c(\mathcal{H}) St \sim St_0(Re)$$

$$Re \rightarrow \infty$$

$cf_0(Re)$ et $St_0(Re)$ représentent respectivement les valeurs du coefficient de frottement et du nombre de Stanton lorsque les propriétés physiques du fluide considéré sont constantes.

L'établissement de ces lois nécessite un certain nombre d'hypothèses qui consistent principalement à admettre a priori l'existence et la forme générale des lois de vitesse et d'enthalpie de paroi et déficitaires et d'une zone de recouvrement. Ces hypothèses ne peuvent être rigoureusement justifiées, mais d'une part, elles sont apparues comme très plausibles et, d'autre part, elles ont conduit à des développements théoriques cohérents.

VI - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KIRIT S., YAJNIK - Asymptotic theory of turbulent shear flows - *Journal of Fluid Mechanics* - vol. 42 - part 2 - June 1970.
- [2] KAPLUN cité par Julian D. COLE - Perturbation methods in applied mathematics.
- [3] SPALDING et CHI - The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer - *Journal of Fluid Mechanics* - vol. 18 part 1 - 1964.

V. — Etude expérimentale du transfert thermique pour un écoulement à propriétés physiques variables

SOMMAIRE

	pages
0 - NOTATIONS	63
1 - INSTALLATION EXPÉRIMENTALE - PRINCIPE D'OBTENTION DES RÉSULTATS	64
1.1 - Présentation générale	64
1.2 - Description de l'installation expérimentale	65
1.3 - Mesures au niveau de la plaque	68
1.4 - Mesures au sein de l'écoulement	75
2 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	79
2.1 - Généralités	79
2.2 - Caractéristiques des essais	79
2.3 - Nombre de Stanton - Formule de corrélation	80
2.4 - Profils de vitesse et de température	81
2.5 - Comparaison entre résultats des bilans dans l'air et au niveau de la plaque	81
3 - CONCLUSION	81

0 - NOTATIONS

	Dimensions
ρ Masse volumique	ML^{-3}
μ Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$
k Conductivité thermique	$MLT^{-3}K^{-1}$
h Enthalpie massique	L^2T^{-2}

T	Température	°K
C	Chaleur massique	$L^2 T^{-2} K^{-1}$
q	Flux thermique	MT^{-3}
H	Demi-distance entre plaque	L
e	Epaisseur	L
x	Abscisse longitudinale	L
$\mathcal{V}$	Volume d'une capacité jaugée	L^3
U	Vitesse	LT^{-1}
St	Nombre de Stanton	0
Nu	Nombre de Nusselt	0
Re	Nombre de Reynolds	0
σ	Constante de Stefan	0

L'indice p se rapporte aux grandeurs pariétales

L'indice m se rapporte aux grandeurs de mélange

1 - INSTALLATION EXPÉRIMENTALE - PRINCIPE D'OBTENTION DES RÉSULTATS

1.1 - PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le but des présentes expériences est la détermination, dans le cas d'un écoulement entre plaques planes, du nombre de Stanton local en fonction des paramètres locaux définissant cet écoulement : nombre de Reynolds, rapport des températures pariétale et de mélange et abscisse réduite.

L'écoulement possède schématiquement les caractéristiques suivantes : en amont d'une section de référence, il est isotherme et établi du point de vue dynamique, en aval de cette section les parois sont refroidies par circulation d'eau.

Le fluide utilisé est l'air. Le nombre de Mach maximum est de l'ordre de 0,05, ce qui permet de négliger tout effet lié à la compressibilité de l'air.

Le nombre de Reynolds (basé sur les grandeurs de mélange et la demi-distance entre plaque) et le rapport des températures pariétale et de mélange varient respectivement de $2,7 \cdot 10^4$ à $5,6 \cdot 10^4$ et de 0,27 à 0,39.

Les nombres de Stanton St et de Reynolds R_H et le rapport des températures T_m/T_p sont déduits de la connaissance du flux thermique cédé par l'écoulement d'air chaud à la plaque inférieure, de la température T_p de surface de cette dernière et des valeurs des grandeurs de mélange.

Pour déterminer ces diverses grandeurs deux types d'expériences ont été effectuées :

- au niveau de la plaque refroidie composée de 90 canaux dans lesquels circulent de l'eau, on détermine par une méthode de bilan thermique dans chaque canal le

flux thermique reçu par la plaque refroidie, ce flux représente, aux corrections de rayonnement et de conduction latérale près, le flux q_p . En outre, ces mesures permettent d'évaluer la température de surface T_p ;

- de la mesure des profils de vitesse et de température au sein de l'écoulement, on déduit les grandeurs de mélange. Comme il le sera précisé par ailleurs (cf. paragraphe 2.5) ces mesures permettent également de recouper les mesures précédentes portant sur le flux thermique.

1.2 - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION EXPÉRIMENTALE

1.2.1 - Généralités (figure 1)

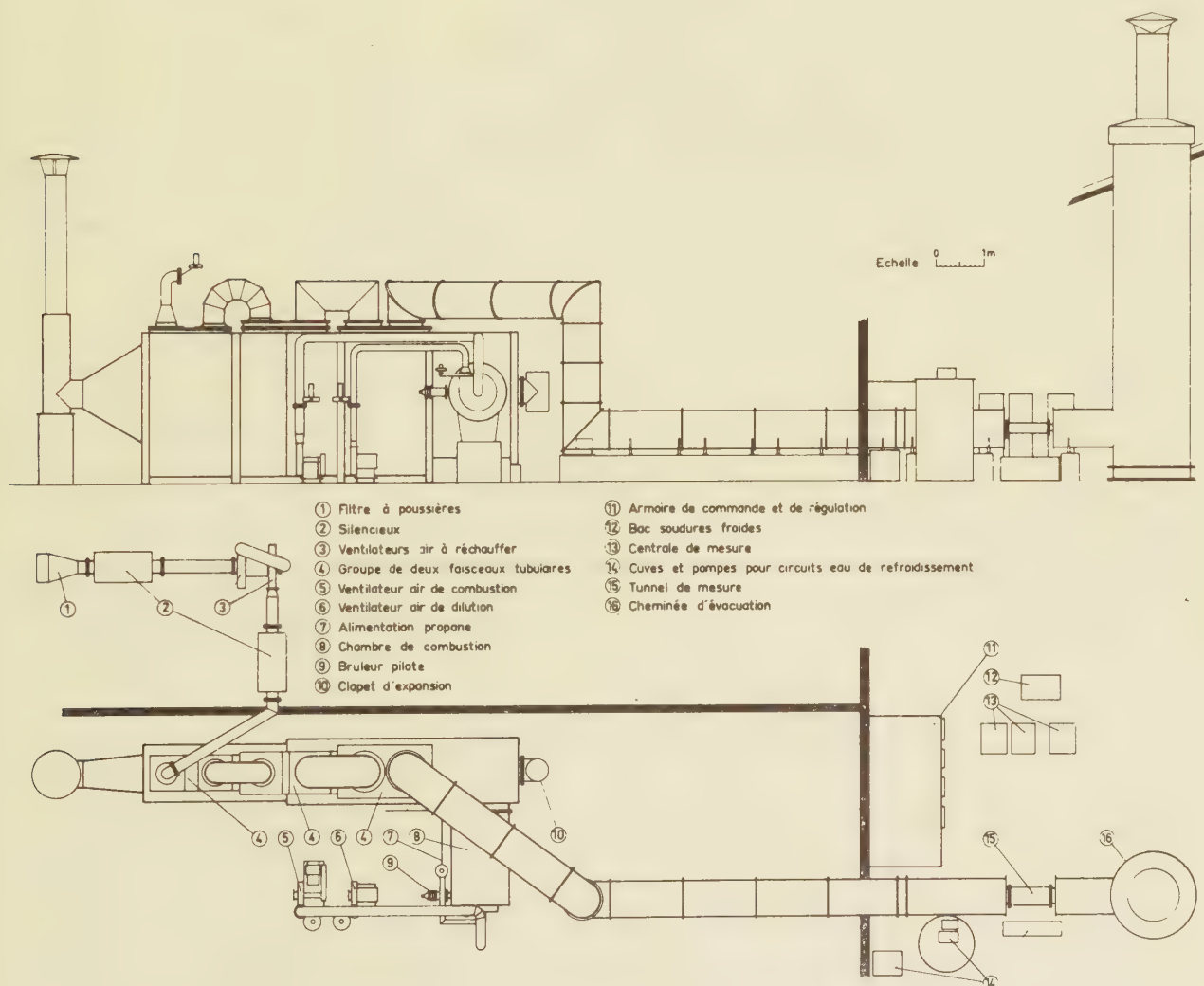


Figure 1 - Ensemble circuit d'air 1050

L'installation expérimentale se compose d'un réchauffeur d'air, d'une tuyauterie, d'une section expérimentale, d'une cheminée assurant l'évacuation de l'air chaud et d'un système d'alimentation en eau destinée au refroidissement de parties de l'installation.

L'air est aspiré à travers un filtre en papier à l'aide d'une pompe, puis est refoulé à travers le reste du circuit.

1.2.2 - Réchauffeur d'air

Le réchauffeur d'air constitue un échangeur de chaleur à contre courant. L'air froid pénètre dans cet appareil et circule à l'intérieur d'une série de tubes métalliques autour desquels s'écoulent des gaz chauds résultants de la combustion de gaz propane. Ces tubes métalliques sont pour les deux premiers étages en acier inoxydable, quant à ceux du troisième et dernier étage, divers alliages ont été employés (NS 30, NS 22 S et Inconel).

Les caractéristiques nominales de ce réchauffeur sont les suivantes :

débit d'air réchauffé	0,75 Kg/s
température de sortie de l'air	1050° C
puissance installée	1 MW
rendement	0,8

La température de 1050° C correspond à la limite d'utilisation pratique des aciers au chrome et au nickel.

1.2.3 - Tuyauterie

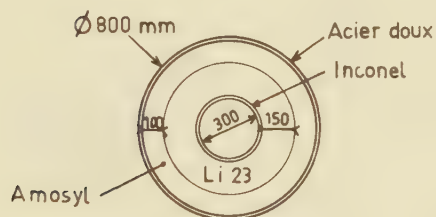


Figure 2

Les qualités techniques que l'on est en droit d'attendre d'une telle tuyauterie sont les suivantes : elle doit être étanche, isolante, légère, et pouvoir résister aux phénomènes de dilatation différentielle.

Pour atteindre ces buts, cette tuyauterie est composée de quatre couches de matériaux différents qui sont, en partant de l'extérieur, les suivants :

- une gaine d'acier doux assurant l'étanchéité
- une couche d'isolant Amosyl, composé de fibre d'amiante et de Kieselguhr

densité 0,4 - 0,5
conductivité thermique 0,08 (MKS)
température maximale d'utilisation 600°C

- une couche de réfractaire Li 23, composée d'oxydes métalliques (Al, Ti, Fe) et d'un liant

densité 0,4 - 0,5
conductivité thermique 0,17 (MKS)
température maximale d'utilisation 1200°C

- une gaine d'acier réfractaire Inconel, de diamètre, 300 mm.

Cette gaine, qui n'est pas étanche, se compose d'une série de tuyaux emboîtés les uns dans les autres. Elle évite que l'air ne soit en contact avec le matériau réfractaire qui est friable, ce qui aurait pour effet de polluer cet air par des poussières. Il n'a pas

été possible de faire cette gaine d'un seul tenant en raison des différences de dilatation entre le réfractaire et l'Inconel.

1.2.4 - Section expérimentale (Figure 3)

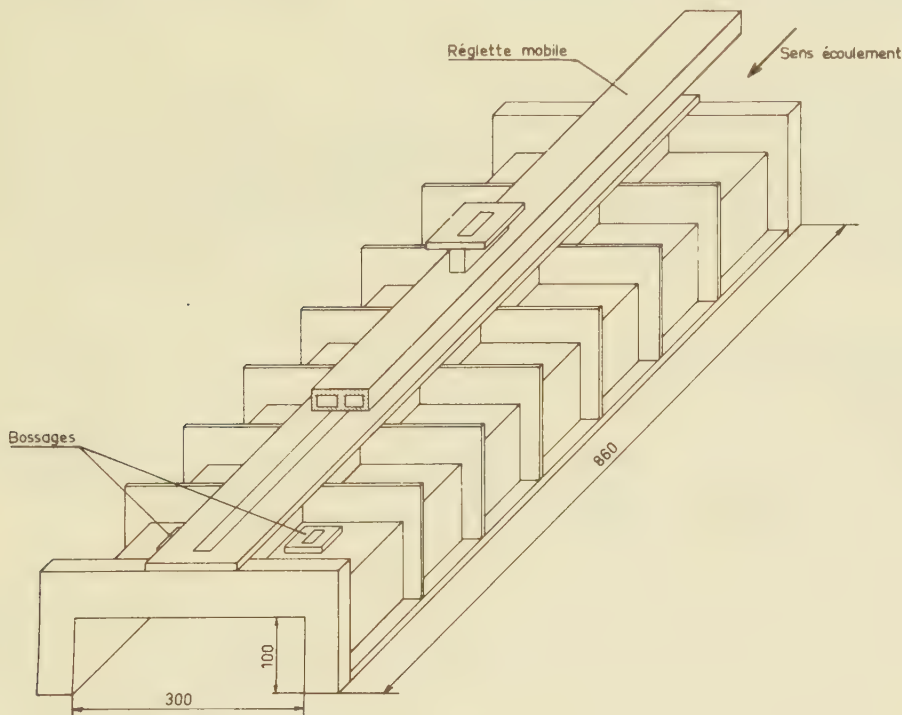


Figure 3 - Tunnel de mesures

A l'extrémité aval de la tuyauterie se trouve un convergent transformant la section circulaire de diamètre 300 mm en une section rectangulaire de 300×100 mm. Ce convergent a été tracé de sorte que son raccord avec la section rectangulaire se fasse sans variation brusque du rayon de courbure des parois, et ce pour éviter tout phénomène de décollement.

En aval de ce convergent sont situés des grillages fins destinés à uniformiser le profil de vitesse et à filtrer l'air, au moins pour ce qui concerne les plus grosses particules. Sur une longueur de 0,72 m la partie inférieure de la tuyauterie est isolée afin de réaliser une paroi adiabatique.

La partie de l'installation sur laquelle on étudie le transfert thermique est composée d'une plaque refroidie carrée de 0,45 m de côté. Au niveau de cette plaque et débordant de 0,25 m en amont et 0,10 m en aval, les parois supérieures et latérales de la tuyauterie sont constituées par un capot refroidi destiné d'une part à permettre l'introduction, sans danger, d'appareils de mesure au sein de l'écoulement, et d'autre part à diminuer le rayonnement reçu par la plaque refroidie. Cette pièce possède, d'une part deux bossages par lesquels on peut introduire à l'intérieur du canal qu'elle délimite en partie des instruments de mesure et, d'autre part, suivant son axe longitudinal, une fente recouverte par une réglette mobile refroidie. Cette réglette comporte un passage permettant l'introduction d'appareils de mesure.

1.2.5 - Cheminée

En aval de la section expérimentale, l'air chaud est dirigé vers une cheminée de 10 mètres de hauteur et de diamètre extérieur 2 mètres. Cette cheminée est constituée de deux cylindres concentriques, celui intérieur est en NS 30, celui extérieur en acier doux. L'espace délimité par ces deux cylindres est rempli de Vermiculite (Mica éclaté par chauffage).

1.2.6 - Système d'alimentation en eau

Le refroidissement de la section expérimentale, de la plaque plane et des divers appareils de mesure est assuré par circulation d'eau. L'eau de ville est tout d'abord adoucie et stockée dans une cuve, une pompe en assure ensuite le refoulement à travers les divers circuits de refroidissement. En cas de panne de la pompe, les circuits de refroidissement sont directement et automatiquement branchés sur le réseau urbain de distribution d'eau.

1.3 - MESURES AU NIVEAU DE LA PLAQUE

1.3.1 - Principe

Le but de ces mesures consiste à évaluer la quantité de chaleur reçue par la plaque refroidie qui représente, aux corrections de rayonnement et de conduction longitudinale près, le flux thermique cédé par l'écoulement d'air chaud.

1.3.2 - Plaque refroidie (figure 4)

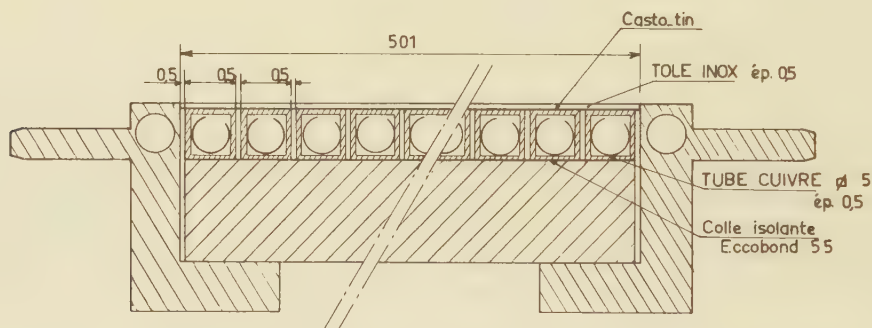


Figure 4 - Plaque froide

La plaque refroidie est composée d'une feuille d'acier inoxydable de 0,5 mm d'épaisseur polie miroir, sur laquelle ont été soudés à l'étain 90 tubes de cuivre de 5 x 5 millimètres extérieur et 0,5 mm d'épaisseur. Ces tubes sont séparés par un intervalle de 0,3 mm.

À l'intérieur de ces tubes circule de l'eau qui assure le refroidissement de la plaque.

L'ensemble des tubes est noyé dans une colle isolante qui diminue les échanges thermiques entre tubes contigus et fixé sur une plaque d'acier de dix millimètres d'épaisseur assurant la rigidité de l'ensemble. Aux extrémités de la plaque qui sont en contact

avec des parties non refroidies de l'installation, les tubes de cuivre ont été remplacés par des pièces en inconel elles aussi refroidies, mais pour lesquelles aucune mesure de flux n'est effectuée.

Pour évaluer la quantité de chaleur reçue par chaque tube, on mesure d'une part l'élévation de température moyenne de l'eau circulant dans le tube considéré, et d'autre part le débit d'eau.

1.3.3 - Mesure de l'élévation de la température moyenne de l'eau dans un canal

Cette mesure s'effectue en déterminant à l'aide de thermocouples la température moyenne de l'écoulement en deux points distants de 0,15 m. A priori un thermocouple placé dans un écoulement indique une température sensiblement ponctuelle et non la température moyenne de cet écoulement, aussi convient-il que dans une section la température de l'eau soit aussi homogène que possible. Pour ce faire, on a introduit à l'intérieur de chaque canal un ressort métallique qui entraîne par sa présence un brassage de l'eau et l'uniformisation de sa température.

Les thermocouples utilisés sont des couples Fer-Constantan avec gaines d'acier inoxydable de 0,5 mm de diamètre extérieur, développant environ 50 μ V par degré d'élévation de la température. L'étalonnage de ces thermocouples a conduit à l'expression suivante de la tension en fonction de la température

$$\begin{aligned} V &= 51,9t + 2,0 \cdot 10^{-2} t^2 & 0^\circ < t < 60^\circ\text{C} \\ V &= \text{microvolts} & t = \text{degré Celsius} \end{aligned}$$

Les soudures froides des thermocouples sont placées dans des tubes de verre remplis de pétrole plongeant dans un mélange d'eau et de glace.

Les tensions délivrées sont mesurées à l'aide d'une centrale de mesure dont la description et le fonctionnement seront donnés par la suite.

1.3.4 - Mesure des débits d'eau (figure 5)

Les débits d'eau circulant dans les canaux sont très faibles, de l'ordre d'un centimètre cube par seconde.

Pour mesurer ces débits avec une bonne précision, on est conduit à employer des capacités jaugées à détection de niveau par électrode. Pour des raisons pratiques, on n'utilise pas 90 capacités jaugées, mais deux seulement qui sont situées sur un chariot mobile se déplaçant face aux sorties des canaux. L'avance du chariot est assurée à l'aide d'une vis dont la mise en rotation est commandée par la centrale de mesure, qui détermine également l'ouverture et la fermeture des électrovannes situées sur les capacités jaugées.

Le fonctionnement d'une capacité jaugée est le suivant : la capacité jaugée étant vide et l'électrovanne fermée, lorsque l'eau arrive au niveau de l'électrode 2, la centrale de mesure détecte une variation de résistance entre cette électrode et l'électrode 1 et déclenche le départ d'une horloge ; lorsque l'eau arrive au niveau de l'électrode 3, la centrale de mesure arrête l'horloge (voir figure 6).

En outre, dans chaque capacité jaugée, se trouve un thermocouple permettant de mesurer la température de l'eau dont on déduit ainsi la masse volumique.

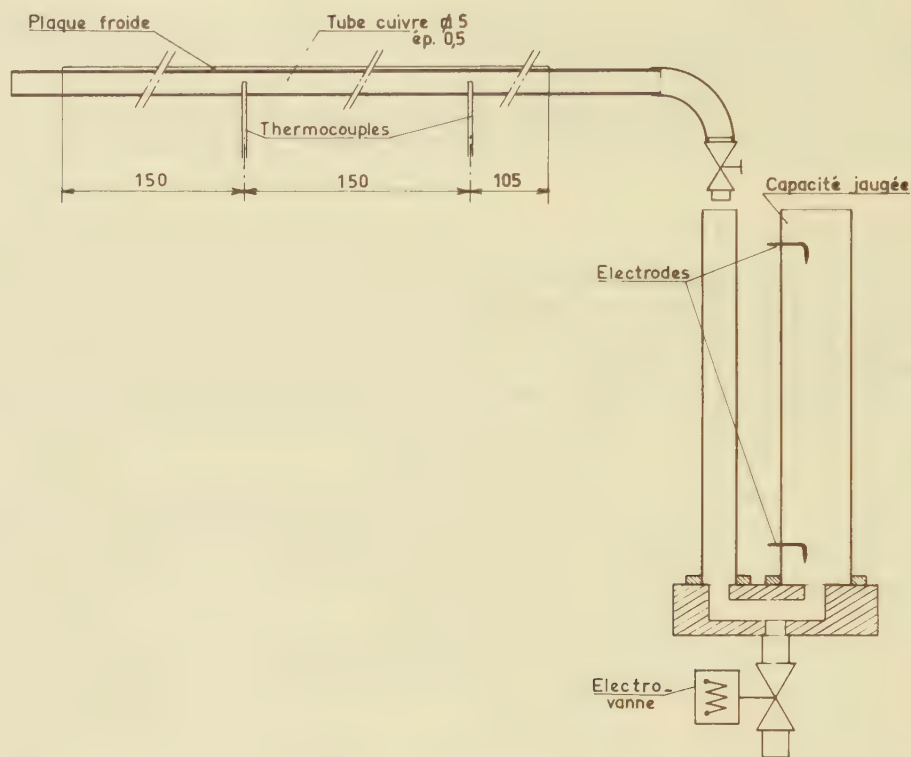


Figure 5 - Schéma de principe de mesure de débit

1.3.5 - Centrale de mesure

Les fonctions de la centrale de mesure sont multiples : elle doit d'une part assurer la mesure des différentes tensions fournies par les appareils de mesure et leur enregistrement sur ruban perforé, et d'autre part, commander l'avance du chariot de mesure, l'ouverture et la fermeture des électrovannes.

1.3.5.1 - Mesures des tensions

A priori les tensions à mesurer sont de deux ordres de grandeurs différents, d'une part celles inférieures à 0,1 Volt ou tension bas-niveau et, d'autre part celles supérieures à 0,1 Volt ou tension haut-niveau.

Les tensions bas-niveau sont tout d'abord amplifiées à l'aide d'un amplificateur Astrodata et transformées ainsi en tension haut-niveau. Ces dernières sont alors converties par un convertisseur tension fréquence Vidar, en un courant alternatif dont la fréquence est proportionnelle à la tension d'entrée. Un fréquencemètre permet alors de mesurer cette fréquence.

Les zéros et gains de l'amplificateur Astrodata et du convertisseur tension-fréquence étant sujets à dérive, il a paru utile de pouvoir connaître à tout instant ces grandeurs ; pour cela, deux voies de la centrale de mesure ont été mise en court circuit et sur deux autres voies ont été affichées des tensions de références connues.

1.3.5.2 - Utilisation de la centrale de mesure

La suite d'opérations effectuées ou commandées par la centrale de mesure se décompose en un cycle de base, un cycle auxiliaire et un cycle général.

- cycle de base (figure 6)

Au cours d'un cycle de base sont effectuées toutes les opérations nécessaires à la détermination des flux thermiques reçus par deux canaux consécutifs.

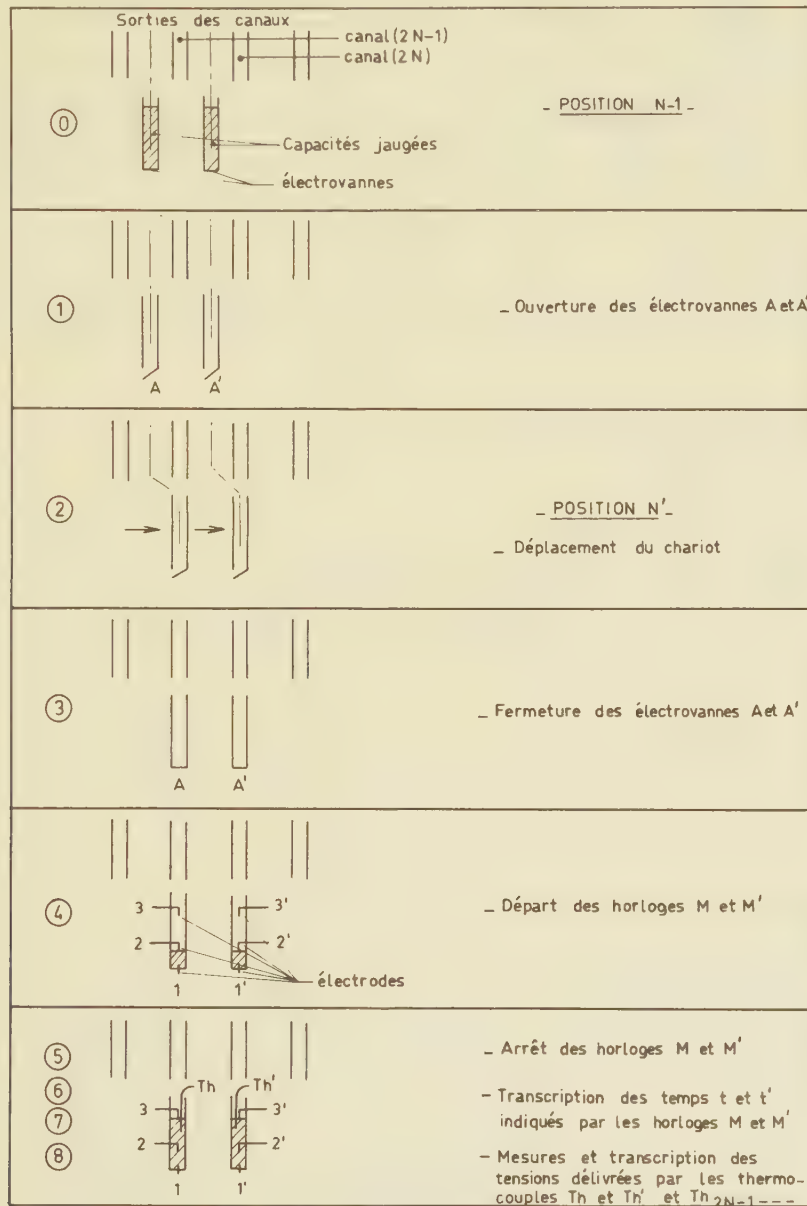


Figure 6

- 0 - chariot de mesure en position N-1.
- 1 - ouverture des électrovannes - vidange des capacités jaugées
- 2 - déplacement du chariot vers la position N'.
- 3 - fermeture des électrovannes
- 4 - départs des horloges M et M' lorsque les résistances entre les électrodes 1 et 2 et 1' et 2' décroissent.
- 5 - arrêt des horloges M et M' lorsque les résistances entre les électrodes 1 et 3 et 1' et 3' décroissent
- 6 - transcription sur ruban perforé des temps t et t' indiqués par les horloges M et M'.
- 7 - mesures et transcriptions des tensions délivrées par les thermocouples th et th'
- 8 - mesures et transcriptions des tensions délivrées par les thermocouples TH_{2N-1} , TH'_{2N-1} , TH_{2N} et TH'_{2N} , situés respectivement dans les canaux 2N-1 et 2N
- 9 - déplacement du chariot vers la position N

- cycle auxiliaire

Au cours d'un cycle auxiliaire sont mesurées les grandeurs caractéristiques des appareils composant la chaîne de mesure.

- 1 - détermination du zéro Astrodata
- 2 - détermination du zéro Vidar
- 3 - gain Astrodata
- 4 - gain Vidar

- cycle général

Le cycle général qui correspond à l'ensemble des mesures effectuées au niveau de la plaque se décompose en la suite d'opérations suivantes :

- 1 - positionnement du chariot en 0
- 2 - cycle auxiliaire
- 3 - 15 cycles de bases $1 \leq N \leq 15$
- 4 - cycle auxiliaire
- 5 - 15 cycles de base $16 \leq N \leq 30$
- 6 - cycle auxiliaire
- 7 - 15 cycles de base $31 \leq N \leq 45$
- 8 - cycle auxiliaire

1.3.6 - Bilan thermique au niveau d'un canal

1.3.6.1 - Flux thermique q_p

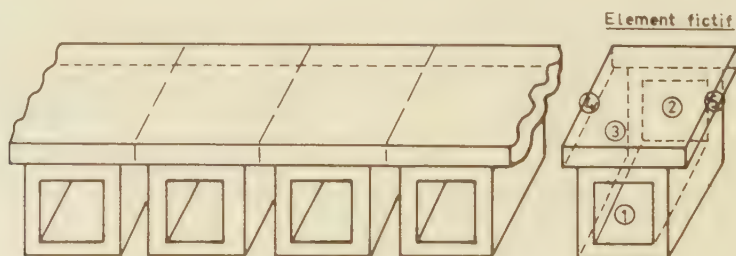


Figure 7

Le but des expériences est la détermination du flux thermique cédé par l'écoulement d'air chaud à la plaque refroidie. Ce flux est déterminé par un bilan thermique au niveau d'un canal. Plus précisément la surface de contrôle par rapport à laquelle sera effectué le bilan thermique est pour chaque canal constitué par :

- deux plans normaux à la plaque et aux canaux situés aux niveaux des thermocouples (faces 1 et 2);
- la surface de la plaque (face 3);
- deux plans normaux à la plaque et parallèles aux canaux, situés de part et d'autre du canal considéré et à égale distance de deux canaux contigus;
- les surfaces latérales et la surface inférieure des canaux qui sont noyées dans de la colle isolante sont considérées comme étant adiabatiques.

Les flux thermiques qui traversent les différentes surfaces sont examinés successivement ci-dessous :

a) Flux normaux aux faces ① et ②

En négligeant les phénomènes de conduction thermique -qui produisent d'ailleurs des flux opposés et sensiblement égaux- la somme algébrique des flux normaux aux faces ① et ② peut s'exprimer de la façon suivante :

$$q_1^* = \frac{\mathcal{V}}{\tau} \rho_e C_e (T_2 - T_1)$$

L'indice i est relatif au i^{ème} canal et l'écoulement est supposé dirigé de la face ① vers la face ②. La signification des lettres est la suivante :

- $\mathcal{V}$ = volume de la capacité jaugée
- τ = temps de remplissage de la capacité jaugée
- ρ_e = masse volumique de l'eau
- C_e = chaleur massique de l'eau
- T_k = température moyenne de la face k

b) Flux normal à la face ③

Ce flux q_i se décompose de la façon suivante

$$q_i = q_{pi} + q_{ri}$$

où q_{pi} désigne le flux cédé par l'écoulement d'air chaud et q_{ri} le flux transmis par rayonnement.

Le terme q_r est difficile à évaluer avec précision : d'une part, on ne connaît pas exactement la température de la conduite chaude (spécialement en aval du capot refroidi) et d'autre part, les émissivités des surfaces sont elles mêmes inconnues. Cependant, il est possible d'en effectuer une évaluation en faisant les hypothèses suivantes :

- la température de la conduite non refroidie est celle du gaz;
- les surfaces autres que celle de la plaque se comportent comme des corps noirs ($\varepsilon = 1$);
- le coefficient d'émissivité de la plaque refroidie est égal à 0,2;
- le rayonnement des parties refroidies de la conduite est négligeable.

Ces hypothèses conduisent à la schématisation suivante : le flux reçu par la plaque refroidie est égal à celui qu'elle recevrait de la part de deux parois, dont l'émissivité serait égale à 1, dont la température serait celle du gaz, et qui serait située aux extrémités amont et aval du capot refroidi, normalement à la direction de l'écoulement.

La figure 8 précise les variations de ce flux de rayonnement en fonction de l'abscisse réduite x/H du canal considéré qui ne représente d'ailleurs qu'une fraction du flux total reçu par la plaque (7 % au maximum) (figure 8).

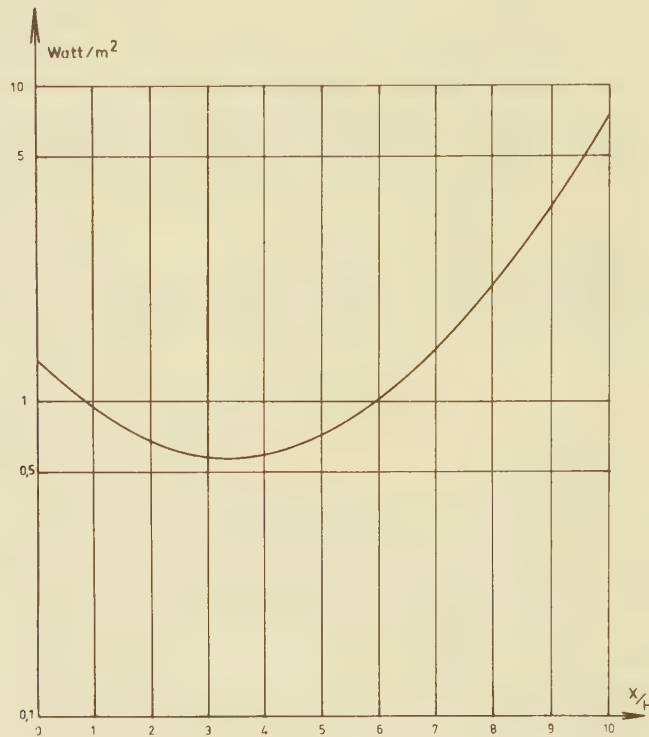


Figure 8 - Flux rayonné/ $\varepsilon (T/100)^4$

c) Flux normaux aux faces 4 et 5

Ces flux sont des flux de conduction engendrés par la présence de gradients longitudinaux de température. Ces derniers proviennent en fait des trois causes suivantes :

- l'inhomogénéité du flux reçu par la plaque;
- les inégalités éventuelles des débits d'eau dans les canaux;
- les variations d'épaisseur de la couche d'étain, d'un canal à l'autre.

En désignant par $\tilde{q}_i$ le flux provenant du canal (i-1), le flux résultant relatif aux faces ④ et ③ s'écrit

$$\tilde{q}_i - \tilde{q}_{i+1}$$

Le bilan thermique au niveau de la surface de contrôle relative au i^{ème} canal s'écrit donc comme suit :

$$q_{p1} + q_{r1} + \tilde{q}_1 - \tilde{q}_{1+1} + q_1^* = 0$$

Dans un premier temps on admettra que les flux de conduction longitudinale $\tilde{q}_1$ sont négligeables ; on déduira donc q_{p1} de la mesure de q_1^* et du calcul de q_{r1} .

1.3.6.2 - Température de surface T_p

La température de paroi n'est pas directement accessible aux mesures, elle se déduit de la connaissance du flux thermique et de la température moyenne de l'écoulement d'eau dans les canaux. Comme cette dernière, elle évolue le long d'un canal de manière sensiblement linéaire. Cette variation de température est faible vis à vis des différences de températures existant entre l'écoulement d'air et la plaque : quelques degrés par rapport à plusieurs centaines. On adoptera donc comme température de l'eau dans un canal donné la moyenne des températures indiquées par les deux thermocouples situés dans ce canal. Malgré cette hypothèse, le calcul de la température de surface de la plaque ne peut être précis et ce pour plusieurs raisons : on ne connaît pas exactement l'épaisseur de la couche d'étain entre la feuille d'acier inoxydable et les tubes de cuivre, et le flux thermique n'est pas normal à la plaque.

On peut cependant évaluer la température de surface à quelques degrés près en admettant que la température de l'écoulement d'eau dans les canaux est uniforme dans une section et que le flux thermique est normal à la plaque.

On a alors :

$$T_p = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) + q \left(\frac{e_{inox}}{k_{inox}} + \frac{e_{sn}}{s_{sn}} + \frac{e_{cu}}{k_{cu}} \right)$$

q_p et q_r étant le flux incident sur la surface de la plaque

T_1 et T_2 les températures indiquées par les thermocouples situés dans le canal considéré

e_{inox} l'épaisseur de la feuille d'acier inoxydable 0,5 mm

k_{inox} la conductivité thermique de l'acier inoxydable

e_{sn} l'épaisseur de la couche d'étain (évaluée à 0,3 mm)

k_{sn} la conductivité thermique de l'étain

e_{cu} l'épaisseur du tube de cuivre (0,5 mm)

k_{cu} la conductivité thermique du cuivre

1.4 - MESURES AU SEIN DE L'ÉCOULEMENT

1.4.1 - Principe

On se propose de déterminer en diverses sections les profils de vitesse et de température. Ces deux grandeurs ne peuvent d'ailleurs être évaluées indépendamment l'une de l'autre. Leurs mesures s'effectuent à l'aide des appareils décrits ci-après et qui tous possèdent des corps de sonde refroidis par circulation d'eau, le capteur proprement dit étant placé perpendiculairement à l'extrémité de ceux-ci.

1.4.2 - Mesures de pression dynamique (figure 9)

a) Tube de Prandtl

Cet appareil permet de mesurer les pressions statique et totale, et possède un embout en acier réfractaire comportant les prises de pression de 5 mm de diamètre extérieur.

b) Tube de Pitot

Destiné aux mesures de pression totale, cet appareil a son extrémité constituée par un tube de Tantale de 0,6 mm (diamètre extérieur).

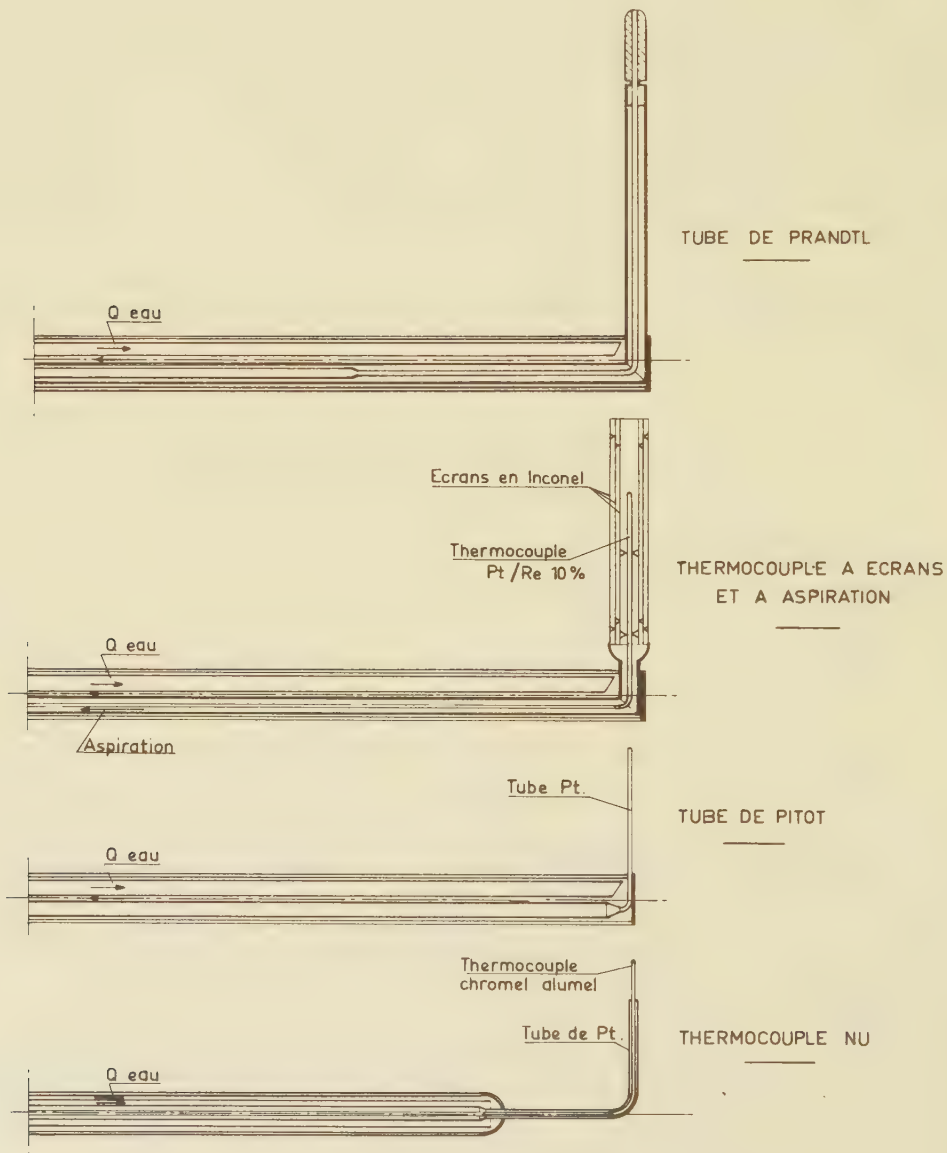


Figure 9 - Extrémité des sondes employées

1.4.3 - Sondes de température (figure 9)

Deux types de sondes ont été employés, toutes deux comportant comme élément sensible un thermocouple Platine Platine Rhodié 10 %.

a) Sonde à écrans et à aspiration

Cette sonde est essentiellement constituée d'un thermocouple entouré de trois écrans métalliques (tungstène) destinés à éliminer l'influence du rayonnement. L'écran central se prolonge en un tube relié à une pompe à aspiration. Le diamètre de l'écran extérieur est de 5 millimètres.

b) Sonde à thermocouple nu

L'élément sensible de cette sonde est constitué par un thermocouple comportant une gaine d'acier inoxydable de 0,25 mm de diamètre extérieur.

1.4.4 - Mesures

On ne peut à l'aide du tube de Prandtl et de la sonde de température à écran et à aspiration, mesurer des profils de pression dynamique et de température, en raison des dimensions de ces appareils qui interdisent de s'approcher suffisamment près de la paroi. Pour effectuer des mesures dans cette région, on est amené à procéder de la manière suivante :

dans un premier temps on mesure en un point situé dans le plan de symétrie de l'écoulement les pressions statiques et totales à l'aide du tube de Prandtl et la température de l'écoulement à l'aide de la sonde à écran et à aspiration ;

on effectue ensuite des mesures de pression totale à l'aide du tube de Pitot et de température à l'aide de la sonde à thermocouple nu, en divers points d'un profil. La température mesurée de cette manière n'est pas, bien évidemment, la température du gaz ; pour obtenir celle-ci, il convient de tenir compte de corrections liées au rayonnement.

1.4.5 - Détermination des profils de vitesse et de température

Considérons un thermocouple de diamètre D dans un écoulement défini par sa vitesse et sa température U_e , T_e . Soient T_R la température que prendrait ce thermocouple en l'absence de tout écoulement et T_c sa température en présence de l'écoulement.

Le bilan thermique au niveau du thermocouple s'écrit :

$$\frac{1}{D} (T_e - T_c) k_e S_c N_u + \sigma \varepsilon S_R (T_R^4 - T_c^4) = 0$$

où S_c et S_R désignent respectivement les surfaces des thermocouples concernés par la convection et le rayonnement et Nu un nombre de Nusselt.

Ceci conduit à

$$T_e = T_c + \frac{\sigma \varepsilon S_R D}{k_e S_c A R_e^4} (T_e^4 - T_R^4)$$

car, au niveau du thermocouple le nombre de Nusselt est lié au nombre de Reynolds

$$R_e = \rho_e \frac{U_e D}{\mu_e} \text{ par une relation de la forme :}$$

$$N_u = A R_e^n \quad n = 0.6$$

or :

$$R_e = \frac{\rho_e}{\mu_e} D \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho_e}}$$

Dès lors on obtient la valeur de la température de l'écoulement qui est donnée par :

$$T_e = T_c + B(T_c^n - T_R^4) \frac{1}{k_e} \left(\frac{\mu_e}{\sqrt{\rho_e}} \frac{1}{\sqrt{\Delta P}} \right)^{0.6}$$

Dans cette relation on ne connaît, ni le coefficient B, ni la température de rayonnement T_R . Le coefficient B est fonction de grandeurs mal connues telles que les surfaces S_c et S_r et l'émissivité de la surface de la gaine du thermocouple. La température T_R en raison de la configuration de l'installation est de l'ordre de la température des parois froides. On peut en calculer une valeur plus exacte, ce qui a été fait, en tenant compte des parois chaudes mais en règle générale :

$$T_R^4 \ll T_c^4$$

La valeur de la constante B est déterminée à partir de la connaissance, dans le plan de symétrie de l'écoulement, des températures T_e et T_c , T_e étant obtenue à l'aide de la sonde à écrans et à aspiration. Ayant ainsi obtenu la valeur de la constante B, il est possible à partir des mesures de ΔP , pression dynamique, et de T_c , température du thermocouple nu, d'obtenir la température T_e et la vitesse de l'écoulement.

A priori, cette méthode n'est justifiée que dans la mesure où $\frac{T_e - T_c}{T_c}$ est petit ; on constate qu'il en est bien ainsi. Dans la région de l'écoulement où l'emploi de la sonde à écrans et à aspiration était possible (distance à la paroi supérieure à 1cm), des mesures ont été faites à l'aide de cette sonde, qui corroborent avec une bonne précision (écart maximum de l'ordre de 10°C) les mesures corrigées obtenues à l'aide du thermocouple nu.

1.4.6 - Température et vitesse de mélange

Par définition de la température et de la vitesse de mélange, on a :

$$\rho_m U_m h_m = \frac{1}{H} \int_0^H \rho U h dy$$

$$\rho_m U_m = \frac{1}{H} \int_0^H \rho U dy$$

Ceci conduit à :

$$h_m = \frac{\int_0^H h \rho U dy}{\int_0^H \rho U dy}$$

$$U_m = \frac{1}{\rho_m H} \int_0^H \rho U dy$$

1.4.7 Bilan thermique

Le bilan thermique entre deux sections voisines conduit, en supposant nul le flux thermique à travers le plan $y = H$, à la relation suivante :

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \rho U (h_g - h) dy = q_p$$

soit :

$$(h_g - h_g) \rho_g U_g = \int_0^x q_p dx$$

Cette relation permet théoriquement de déterminer le flux pariétal q_p , à partir de la connaissance des grandeurs de mélange.

2 - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

2.1 - GÉNÉRALITÉS

Les mesures effectuées au niveau de la plaque refroidie conduisent aux valeurs du flux q_p et de la température pariétale T_p . Pour accéder aux nombre de Reynolds et de Stanton, on a besoin des caractéristiques de mélange T_m et U_m de l'écoulement, qui sont obtenues à partir des mesures faites au sein de l'écoulement.

2.2 - CARACTÉRISTIQUES DES ESSAIS

Les douze séries de mesures effectuées peuvent être caractérisées soit par les conditions de fonctionnement du réchauffeur, soit par les valeurs du nombre de Reynolds R_H et le rapport des températures T_m/T_p . Le tableau suivant dresse une liste de ces caractéristiques.

Débit kg/s	0,5	0,6	0,75	0,5	0,6	0,75	0,5	0,6	0,75	0,5	0,6	0,75
Temp. °C	500			600			800			900		
R_H	34 400	43 400	56 200	32 600	40 500	52 400	28 600	35 800	46 100	27 200	33 900	44 000
T_m/T_p	2,60	2,54	2,56	2,89	2,86	2,85	3,50	3,49	3,49	3,78	3,79	3,78

Les mesures au sein de l'écoulement d'air ont été faites en dix sections distantes de 0,05 m et dont la première a pour abscisse 0,03 m par rapport à l'origine de la plaque refroidie. Pour des raisons pratiques (coût et durée des essais), la série complète de mesures dans l'air n'a été effectuée que pour le débit d'air de 0,6 kg/s. Pour les débits de 0,5 et 0,75 kg/s, les mesures ont été limitées à une seule section ($x = 0,48$ m). Les résultats de ces mesures et la connaissance du flux pariétal ont permis de déterminer les grandeurs de mélange en toute section.

2.3 - NOMBRE DE STANTON - FORMULE DE CORRÉLATION

Les résultats des différents essais sont présentés dans les planches 1 à 12. On constate que pour un essai donné, les variations du nombre de Stanton en fonction de l'abscisse sont très irrégulières ; ceci trouve son explication dans le fait que, contrairement à l'hypothèse adoptée précédemment, le flux longitudinal de conduction $\tilde{q}_1$ n'est pas négligeable.

Cependant, si au lieu de considérer le nombre de Stanton moyen pour un canal, on s'intéresse au nombre de Stanton moyen pour N canaux, l'erreur relative commise en négligeant la conduction longitudinale sera divisée par N. En effet, l'erreur absolue de ce phénomène parasite est en moyenne indépendante du nombre de canaux N.

Sur les planches 13 à 16 sont portés les résultats correspondants au cas $N = 9$, on constate que les variations du nombre de Stanton en fonction de l'abscisse sont beaucoup plus régulières. Il convient cependant de noter que ce qui a été gagné en précision sur la valeur du nombre de Stanton trouve sa contrepartie dans le fait que cette valeur correspond à une moyenne sur une zone plus étendue.

Afin de déterminer l'influence des variations des propriétés physiques du fluide sur le nombre de Stanton, on a cherché à représenter les variations de ce nombre par la formule de corrélation suivante :

$$\text{St}\left(\frac{x}{H}, R_H, \frac{T_m}{T_p}\right) = f\left(\frac{x}{H}\right) R_H^{\alpha\left(\frac{x}{H}\right)} \left(\frac{T_m}{T_p}\right)^{\beta\left(\frac{x}{H}\right)} \quad R_H = \frac{u_g}{v_g}$$

$$\text{St} = \frac{q_p}{c_m U_m (h_m - h_p)}$$

$\alpha(x/H)$ et $\beta(x/H)$ étant à priori des fonctions monotones de x/H ont été prises sous la forme suivante :

$$\alpha(x/H) = a + a' \exp(-a'' x/H)$$

$$\beta(x/H) = b + b' \exp(-b'' x/H)$$

La détermination des fonctions $f(x/H)$ (recherchée sous forme de valeurs discrètes), $\alpha(x/H)$ et $\beta(x/H)$ conduit à chercher le minimum de l'expression suivante :

$$\sum_{i,j} \left[\log \text{St}_{ij} - \bar{f}_i - \left(a + a' \exp - a'' \frac{x_i}{H} \right) \log R_j - \left(b + b' \exp \left(- b'' \frac{x_i}{H} \right) \log \frac{T_m}{T_p} \right] \right]$$

par rapport à $\bar{f}_i (i = 1 \dots)$ a, a', a'', b, b' et b'' ($\bar{f} = \log f$)

L'indice i se rapporte aux canaux ou groupe de canaux $i=1, \frac{90}{N}$

L'indice j se rapporte aux divers essais $j = 1, 12$.

Les calculs correspondants ont été effectués pour les valeurs suivantes de N : 1, 3, 5 et 9. On constate que si les valeurs de la fonction f dépendent de N de manière assez marquée, les fonctions $\alpha(x/H)$ et $\beta(x/H)$ en sont pratiquement indépendantes et sont définies par les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} a = -0,18 & a' = -0,21 & a'' = 1,7 \\ b = 0,26 & b' = -0,3 & b'' = 0,6 \end{array}$$

Sur les figures des planches 17, 18 et 19 sont tracées les variations des fonctions α , β et f ; cette dernière correspondant aux valeurs lissées obtenues dans le cas $N = 1$.

2.4 - PROFILS DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE

Pour le débit de 0,6 kg/s et les températures de 500°, 600°, 800° et 900°, des séries de dix profils de vitesse et de température ont été mesurées (planches 20 à 32). Il n'a malheureusement pas été possible de présenter ces résultats sous forme adimensionnelle, la détermination du coefficient de frottement n'ayant pu être menée à bien.

Les profils de vitesse et de température sont, en ce qui concerne leur forme, assez peu différents de ceux obtenus dans le cas d'un fluide à propriétés physiques constantes et ils présentent une région logarithmique assez bien délimitée.

2.5 - COMPARAISON ENTRE RÉSULTATS DES BILANS DANS L'AIR ET AU NIVEAU DE LA PLAQUE

Pour le débit de 0,6 kg/s, il est théoriquement possible de déterminer le nombre de Stanton à l'aide des seules mesures effectuées dans l'écoulement d'air. Une telle détermination serait cependant peu précise, car elle implique la dérivation de grandeurs qui résultent de mesures, aussi a-t-il paru plus intéressant de faire porter la comparaison sur le flux reçu par la plaque refroidie.

Sur la planche 33, pour les quatre températures 500, 600, 800 et 900°C, sont portés les flux reçus par la plaque, évalués par l'une et l'autre méthode de bilan.

On constate que l'accord n'est pas parfait, spécialement pour x/H petit ; ce désaccord peut trouver son explication dans une mauvaise évaluation de l'enthalpie de mélange qui pour x/H petit ne fait intervenir que quelques points de mesure.

3 - CONCLUSION

L'objet des présentes expériences était la détermination de l'influence des variations des propriétés physiques du fluide sur le nombre de Stanton. Les résultats expérimentaux obtenus peuvent se résumer par la formule suivante :

$$St = f\left(\frac{x}{H}\right) R_H^{\alpha\left(\frac{x}{H}\right)} \left(\frac{T_s}{T_p}\right)^{\beta\left(\frac{x}{H}\right)}$$

$$\alpha(t) = -0,18 - 0,21 \exp(-1,7 t)$$

$$\beta(t) = 0,26 - 0,3 \exp(-0,6 t)$$

Cette formule de corrélation n'a pas la prétention d'être valable dans toutes les gammes de nombre de Reynolds et de rapport de température mais seulement dans les conditions suivantes :

Nombre de Reynolds voisin de 4.10^4

Rapport des températures voisin de 3.

VI. — Conclusion générale

Avant de clore cette étude, dont le sujet était le transfert thermique à travers une couche limite turbulente dans le cas d'un fluide à propriétés physiques variables, il convient d'en rappeler ici les points principaux.

De l'étude bibliographique se dégagent un certain nombre d'idées qui sont les suivantes :

- les expériences ont été essentiellement motivées par des considérations pratiques. Les mesures effectuées ne portent en général que sur les coefficients de frottement et de transfert thermique et les expérimentateurs ont cherché à rendre compte de ces résultats par des formules de corrélation peu satisfaisantes du point de vue théorique, mais d'un emploi aisé et qui conduisent à des résultats acceptables en pratique;

- essentiellement inspirées par les études sur la couche limite turbulente superficielle, les théories sont des prolongements plus ou moins arbitraires des méthodes utilisées dans l'étude de la couche limite à propriétés physiques constantes et ne reposent pas sur des hypothèses explicites. De plus, ces théories supposent que la température soit constante ou lentement variable en fonction de l'abscisse.

Les remarques précédentes ont guidé la présente étude tant du point de vue expérimental que théorique.

Caractérisés par les valeurs suivantes des paramètres : $2,7.10^4 < R_H < 5,6.10^4$, $2,5 < \frac{T_m}{T_p} < 3,8$ et $\frac{x}{H} < 10$, les résultats expérimentaux relatifs à un écoulement entre plaques portent essentiellement sur le nombre de Stanton et peuvent être résumés par la formule de corrélation suivante :

$$St = f\left(\frac{x}{H}\right) R_H^{\alpha\left(\frac{x}{H}\right)} \left(\frac{T_m}{T_p}\right)^{\beta\left(\frac{x}{H}\right)}$$

$$\alpha(t) = - 0,18 - 0,21 \exp (- 1,7 t)$$

$$\beta(t) = - 0,26 - 0,3 \exp (- 0,6 t)$$

L'impossibilité pratique d'évaluer correctement le coefficient de frottement n'a pas permis de présenter les profils de vitesse et d'enthalpie sous forme adimensionnelle.

La première théorie qui a trait à la région de l'écoulement située immédiatement en aval de la discontinuité de température conduit pour le nombre de Stanton à la loi de

variation suivante :

$$St = cte \left(\frac{x}{H} \right)^{-1/3} R_H^{-1/3} [cf_o (R_H)]^{+1/3} ST \left(\frac{h_m}{h_p} \right)$$

Cette formule, dans le cas précis des expériences effectuées dans le cadre de cette étude, s'écrit encore sous la forme approchée suivante :

$$St = cte \left(\frac{x}{H} \right)^{-1/3} R_H^{-0,4} \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^{0,05}$$

La formule de corrélation extrapolée pour x/H tendant vers zéro conduit, quant à elle, à la loi suivante :

$$St = f \left(\frac{x}{H} \right) R_H^{-0,39} \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^{-0,04}$$

On constate que l'accord entre théorie et expérience est satisfaisant, la comparaison portant sur les exposants de R_H et T_m/T_p . Ce fait peut d'ailleurs sembler étonnant car l'étude théorique ne concerne que la région de l'écoulement située immédiatement en aval de la discontinuité de température (dans le cas présent $x \sim 1$ mm) et l'étude expérimentale ne prétend pas à une analyse aussi fine du phénomène.

La seconde théorie, limitée au cas d'une température pariétale constante ou lentement variable en fonction de l'abscisse, conduit en ce qui concerne les coefficients de frottement et de transfert thermique aux lois générales suivantes :

$$\begin{aligned} cf F_c \left(\frac{h_m}{h_p} \right) &\sim cf_o (R_H) \\ R_H &\rightarrow \infty \\ St F_c \left(\frac{h_m}{h_p} \right) &\sim St_o (R_H) \end{aligned}$$

avec :

$$F_c (x) = \left[\frac{x^{\frac{n_p}{2} + 1}}{\left(\frac{n_p}{2} + 1 \right) (x - 1) x^{n_p/2}} \right]^2$$

$cf_o (R_H)$ et $St_o (R_H)$ représentent respectivement les valeurs du coefficient de frottement et du nombre de Stanton lorsque les propriétés physiques du fluide sont constantes.

Dans des gammes réduites de variation du nombre de Reynolds R_H et du rapport des températures T_m/T_p , il est possible de représenter ces lois sous la forme :

$$cf = Cte R_H^{\alpha'} \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^{\beta'}, \quad St = Cte R_H^{\alpha''} \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^{\beta''}$$

Le tableau suivant dresse une liste des valeurs de α'' et β'' correspondant aux résultats de Perkins et Worsoe-Schmidt et aux résultats présentés au cours de cette étude.

Expériences	R_H	T_m/T_p	Théorie		Expériences	
			α''	β''	α''	β''
Perkins et Worsoe-Schmidt	10^5	0,3-1	- 0,2	0,6	- 0,2	0,7
Présentes expériences	$4 \cdot 10^4$	2,5-4	- 0,2	0,36	- 0,2	0,26

L'accord peut être considéré comme satisfaisant surtout si l'on tient compte de l'imprécision des résultats expérimentaux et du fait que la loi théorique est une loi asymptotique valable pour un nombre de Reynolds infiniment grand.

De manière générale, malgré l'accord entre résultats théoriques et expérimentaux, il conviendrait pour juger de la validité de l'une et l'autre théories de comparer les lois de vitesse et d'enthalpie auxquelles elles conduisent à des profils mesurés expérimentalement.

ANNEXE

RESULTATS EXPERIMENTAUX BILAN PLAQUE

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
34400.

NOMBRE DE STANTON

TEMPERATURES AMONT/PAROÏ
2.60

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.45	2.60	.27	881
3.45	2.60	.38	777
3.45	2.60	.49	741
3.45	2.60	.59	694
3.45	2.60	.70	594
3.45	2.60	.80	537
3.45	2.60	.91	515
3.45	2.60	1.02	537
3.45	2.60	1.12	515
3.45	2.60	1.23	513
3.45	2.60	1.34	470
3.45	2.60	1.44	470
3.45	2.60	1.55	481
3.45	2.59	1.65	497
3.45	2.59	1.76	441
3.45	2.59	1.87	397
3.45	2.59	1.97	432
3.45	2.59	2.08	446
3.45	2.59	2.19	441
3.45	2.59	2.29	423
3.45	2.59	2.40	412
3.45	2.59	2.50	409
3.45	2.59	2.61	437
3.45	2.59	2.72	391
3.45	2.59	2.82	420
3.46	2.59	2.93	398
3.46	2.59	3.03	383
3.46	2.59	3.14	406
3.46	2.59	3.25	447
3.46	2.59	3.35	453

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.46	2.59	3.46	432
3.46	2.59	3.57	403
3.46	2.59	3.67	359
3.46	2.59	3.78	339
3.46	2.59	3.88	349
3.46	2.59	3.99	353
3.46	2.59	4.10	348
3.46	2.59	4.20	361
3.46	2.58	4.31	311
3.46	2.58	4.42	409
3.46	2.58	4.52	394
3.46	2.58	4.63	440
3.46	2.58	4.73	420
3.46	2.58	4.84	418
3.46	2.58	4.95	402
3.46	2.58	5.05	406
3.46	2.58	5.16	382
3.46	2.58	5.27	372
3.46	2.58	5.37	429
3.46	2.58	5.48	392
3.47	2.58	5.58	472
3.47	2.58	5.69	397
3.47	2.58	5.80	375
3.47	2.58	5.90	393
3.47	2.58	6.01	382
3.47	2.58	6.12	345
3.47	2.58	6.22	405
3.47	2.58	6.33	374
3.47	2.58	6.43	363
3.47	2.58	6.54	392

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.47	2.58	6.65	398
3.47	2.58	6.75	350
3.47	2.58	6.86	403
3.47	2.58	6.97	416
3.47	2.57	7.07	393
3.47	2.57	7.18	404
3.47	2.57	7.28	387
3.47	2.57	7.39	389
3.47	2.57	7.50	334
3.47	2.57	7.60	340
3.47	2.57	7.71	376
3.47	2.57	7.81	405
3.47	2.57	7.92	400
3.47	2.57	8.03	416
3.47	2.57	8.13	378
3.48	2.57	8.24	373
3.48	2.57	8.35	410
3.48	2.57	8.45	413
3.48	2.57	8.56	413
3.48	2.57	8.66	396
3.48	2.57	8.77	390
3.48	2.57	8.88	390
3.48	2.57	8.98	392
3.48	2.57	9.09	407
3.48	2.57	9.20	398
3.48	2.57	9.30	392
3.48	2.57	9.41	391
3.48	2.57	9.51	382
3.48	2.57	9.62	385
3.48	2.56	9.73	398

Planche 1

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
43400.

NOMBRE DE STANTON

TEMPERATURES AMONT/PAROÏ
2.54

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.35	2.54	.27	812
4.35	2.54	.38	723
4.35	2.54	.49	712
4.35	2.54	.59	616
4.35	2.54	.70	570
4.35	2.54	.80	535
4.35	2.54	.91	497
4.35	2.54	1.02	521
4.35	2.53	1.12	450
4.35	2.53	1.23	480
4.35	2.53	1.34	451
4.35	2.53	1.44	454
4.35	2.53	1.55	442
4.35	2.53	1.65	467
4.35	2.53	1.76	428
4.35	2.53	1.87	413
4.35	2.53	1.97	402
4.35	2.53	2.08	416
4.35	2.53	2.19	410
4.36	2.53	2.29	388
4.36	2.53	2.40	381
4.36	2.53	2.50	392
4.36	2.53	2.61	402
4.36	2.53	2.72	395
4.36	2.53	2.82	380
4.36	2.53	2.93	385
4.36	2.53	3.03	366
4.36	2.53	3.14	399
4.36	2.53	3.25	401
4.36	2.53	3.35	427

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.36	2.53	3.46	419
4.36	2.53	3.57	394
4.36	2.53	3.67	334
4.36	2.53	3.78	326
4.36	2.52	3.88	328
4.36	2.52	3.99	319
4.36	2.52	4.10	332
4.36	2.52	4.20	339
4.37	2.52	4.31	322
4.37	2.52	4.42	398
4.37	2.52	4.52	378
4.37	2.52	4.63	417
4.37	2.52	4.73	397
4.37	2.52	4.84	411
4.37	2.52	4.95	359
4.37	2.52	5.05	384
4.37	2.52	5.16	364
4.37	2.52	5.27	356
4.37	2.52	5.37	407
4.37	2.52	5.48	405
4.37	2.52	5.58	369
4.37	2.52	5.69	373
4.37	2.52	5.80	371
4.37	2.52	5.90	386
4.37	2.52	6.01	340
4.37	2.52	6.12	303
4.37	2.52	6.22	372
4.37	2.52	6.33	379
4.38	2.52	6.43	362
4.38	2.51	6.54	380

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.38	2.51	6.65	371
4.38	2.51	6.75	377
4.38	2.51	6.86	376
4.38	2.51	6.97	392
4.38	2.51	7.07	348
4.38	2.51	7.18	385
4.38	2.51	7.28	350
4.38	2.51	7.39	353
4.38	2.51	7.50	306
4.38	2.51	7.60	308
4.38	2.51	7.71	353
4.38	2.51	7.81	392
4.38	2.51	7.92	374
4.38	2.51	8.03	392
4.38	2.51	8.13	354
4.38	2.51	8.24	352
4.38	2.51	8.35	369
4.39	2.51	8.45	380
4.39	2.51	8.56	372
4.39	2.51	8.66	370
4.39	2.51	8.77	382
4.39	2.51	8.88	375
4.39	2.51	8.98	358
4.39	2.51	9.09	389
4.39	2.51	9.20	365
4.39	2.50	9.30	376
4.39	2.50	9.41	351
4.39	2.50	9.51	372
4.39	2.50	9.62	346
4.39	2.50	9.73	371

Planche 2

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
56200.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.63	2.56	.27	741
5.63	2.56	.38	712
5.63	2.56	.49	731
5.63	2.56	.59	617
5.63	2.56	.70	547
5.63	2.56	.80	491
5.63	2.56	.91	475
5.63	2.56	1.02	481
5.63	2.56	1.12	464
5.63	2.56	1.23	436
5.63	2.56	1.34	436
5.63	2.56	1.44	419
5.63	2.56	1.55	422
5.63	2.56	1.65	435
5.63	2.56	1.76	417
5.63	2.56	1.87	375
5.64	2.56	1.97	379
5.64	2.56	2.08	397
5.64	2.55	2.19	412
5.64	2.55	2.29	356
5.64	2.55	2.40	381
5.64	2.55	2.50	397
5.64	2.55	2.61	406
5.64	2.55	2.72	350
5.64	2.55	2.82	409
5.64	2.55	2.93	368
5.64	2.55	3.03	355
5.64	2.55	3.14	390
5.64	2.55	3.25	420
5.64	2.55	3.35	412

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.64	2.55	3.46	392
5.65	2.55	3.57	372
5.65	2.55	3.67	335
5.65	2.55	3.78	312
5.65	2.55	3.88	327
5.65	2.55	3.99	321
5.65	2.55	4.10	328
5.65	2.55	4.20	324
5.65	2.55	4.31	283
5.65	2.55	4.42	369
5.65	2.55	4.52	373
5.65	2.55	4.63	412
5.65	2.54	4.73	404
5.65	2.54	4.84	387
5.65	2.54	4.95	363
5.65	2.54	5.05	363
5.66	2.54	5.16	347
5.66	2.54	5.27	372
5.66	2.54	5.37	363
5.66	2.54	5.48	399
5.66	2.54	5.58	341
5.66	2.54	5.69	357
5.66	2.54	5.80	339
5.66	2.54	5.90	363
5.66	2.54	6.01	339
5.66	2.54	6.12	383
5.66	2.54	6.22	351
5.66	2.54	6.33	361
5.66	2.54	6.43	341
5.66	2.54	6.54	342

TEMPERATURES AMONT/PAROI
2.56

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.66	2.54	6.65	379
5.67	2.54	6.75	365
5.67	2.54	6.86	377
5.67	2.54	6.97	389
5.67	2.54	7.07	357
5.67	2.54	7.18	373
5.67	2.54	7.28	332
5.67	2.54	7.39	348
5.67	2.53	7.50	299
5.67	2.53	7.60	297
5.67	2.53	7.71	367
5.67	2.53	7.81	380
5.67	2.53	7.92	372
5.67	2.53	8.03	394
5.67	2.53	8.13	345
5.67	2.53	8.24	328
5.68	2.53	8.35	378
5.68	2.53	8.45	380
5.68	2.53	8.56	388
5.68	2.53	8.66	369
5.68	2.53	8.77	389
5.68	2.53	8.88	361
5.68	2.53	8.98	358
5.68	2.53	9.09	366
5.68	2.53	9.20	364
5.68	2.53	9.30	352
5.68	2.53	9.41	351
5.68	2.53	9.51	324
5.68	2.53	9.62	363
5.68	2.53	9.73	331

Planche 3

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
32600.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.26	2.89	.27	907
3.26	2.89	.38	825
3.26	2.89	.49	750
3.26	2.89	.59	740
3.26	2.89	.70	618
3.26	2.89	.80	564
3.26	2.89	.91	499
3.26	2.89	1.02	550
3.26	2.89	1.12	522
3.27	2.89	1.23	516
3.27	2.89	1.34	478
3.27	2.89	1.44	481
3.27	2.89	1.55	463
3.27	2.89	1.65	492
3.27	2.89	1.76	445
3.27	2.88	1.87	449
3.27	2.88	1.97	427
3.27	2.88	2.08	453
3.27	2.88	2.19	427
3.27	2.88	2.29	421
3.27	2.88	2.40	411
3.27	2.88	2.50	437
3.27	2.88	2.61	411
3.27	2.88	2.72	444
3.27	2.88	2.82	410
3.27	2.88	2.93	430
3.27	2.88	3.03	404
3.27	2.88	3.14	425
3.27	2.88	3.25	451
3.27	2.88	3.35	466

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.27	2.88	3.46	430
3.27	2.88	3.57	422
3.27	2.88	3.67	367
3.27	2.88	3.78	360
3.27	2.88	3.88	358
3.27	2.88	3.99	362
3.27	2.88	4.10	384
3.27	2.88	4.20	374
3.27	2.88	4.31	379
3.28	2.88	4.42	405
3.28	2.88	4.52	413
3.28	2.87	4.63	422
3.28	2.87	4.73	423
3.28	2.87	4.84	444
3.28	2.87	4.95	400
3.28	2.87	5.05	432
3.28	2.87	5.16	396
3.28	2.87	5.27	394
3.28	2.87	5.37	368
3.28	2.87	5.48	451
3.28	2.87	5.58	448
3.28	2.87	5.69	379
3.28	2.87	5.80	397
3.28	2.87	5.90	417
3.28	2.87	6.01	402
3.28	2.87	6.12	318
3.28	2.87	6.22	399
3.28	2.87	6.33	386
3.28	2.87	6.43	383
3.28	2.87	6.54	407

TEMPERATURES AMONT/PAROI
2.89

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.28	2.87	6.65	399
3.28	2.87	6.75	417
3.28	2.87	6.86	399
3.28	2.87	6.97	416
3.28	2.87	7.07	393
3.28	2.87	7.18	419
3.28	2.87	7.28	418
3.28	2.86	7.39	383
3.28	2.86	7.50	346
3.29	2.86	7.60	367
3.29	2.86	7.71	373
3.29	2.86	7.81	422
3.29	2.86	7.92	409
3.29	2.86	8.03	420
3.29	2.86	8.13	385
3.29	2.86	8.24	396
3.29	2.86	8.35	401
3.29	2.86	8.45	400
3.29	2.86	8.56	418
3.29	2.86	8.66	414
3.29	2.86	8.77	400
3.29	2.86	8.88	407
3.29	2.86	8.98	387
3.29	2.86	9.09	415
3.29	2.86	9.20	391
3.29	2.86	9.30	399
3.29	2.86	9.41	392
3.29	2.86	9.51	381
3.29	2.86	9.62	375
3.29	2.86	9.73	384

Planche 4

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
40500.

NOMBRE DE STANTON

TEMPERATURES AMONT/PAROÏ
2.86

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.06	2.86	.27	820
4.06	2.86	.38	773
4.06	2.86	.49	707
4.06	2.86	.59	689
4.06	2.86	.70	583
4.06	2.86	.80	530
4.06	2.85	.91	520
4.06	2.85	1.02	524
4.06	2.85	1.12	498
4.06	2.85	1.23	487
4.06	2.85	1.34	453
4.06	2.85	1.44	458
4.06	2.85	1.55	448
4.06	2.85	1.65	474
4.06	2.85	1.76	424
4.06	2.85	1.87	426
4.06	2.85	1.97	394
4.06	2.85	2.08	441
4.06	2.85	2.19	397
4.06	2.85	2.29	394
4.06	2.85	2.40	387
4.06	2.85	2.50	400
4.06	2.85	2.61	409
4.06	2.85	2.72	421
4.07	2.85	2.82	394
4.07	2.85	2.93	390
4.07	2.85	3.03	352
4.07	2.85	3.14	430
4.07	2.85	3.25	417
4.07	2.85	3.35	462

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.07	2.85	3.46	414
4.07	2.85	3.57	401
4.07	2.84	3.67	349
4.07	2.84	3.78	348
4.07	2.84	3.88	338
4.07	2.84	3.99	350
4.07	2.84	4.10	345
4.07	2.84	4.20	364
4.07	2.84	4.31	358
4.07	2.84	4.42	402
4.07	2.84	4.52	392
4.07	2.84	4.63	418
4.07	2.84	4.73	403
4.07	2.84	4.84	425
4.07	2.84	4.95	383
4.07	2.84	5.05	407
4.07	2.84	5.16	379
4.07	2.84	5.27	409
4.08	2.84	5.37	414
4.08	2.84	5.48	417
4.08	2.84	5.58	392
4.08	2.84	5.69	390
4.08	2.84	5.80	375
4.08	2.84	5.90	390
4.08	2.84	6.01	358
4.08	2.84	6.12	349
4.08	2.84	6.22	402
4.08	2.84	6.33	403
4.08	2.83	6.43	382
4.08	2.83	6.54	409

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.08	2.83	6.65	379
4.08	2.83	6.75	409
4.08	2.83	6.86	394
4.08	2.83	6.97	421
4.08	2.83	7.07	368
4.08	2.83	7.18	402
4.08	2.83	7.28	396
4.08	2.83	7.39	370
4.08	2.83	7.50	328
4.08	2.83	7.60	355
4.08	2.83	7.71	368
4.08	2.83	7.81	405
4.09	2.83	7.92	382
4.09	2.83	8.03	393
4.09	2.83	8.13	374
4.09	2.83	8.24	367
4.09	2.83	8.35	374
4.09	2.83	8.45	390
4.09	2.83	8.56	387
4.09	2.83	8.66	400
4.09	2.83	8.77	399
4.09	2.83	8.88	392
4.09	2.83	8.98	374
4.09	2.83	9.09	398
4.09	2.82	9.20	368
4.09	2.82	9.30	391
4.09	2.82	9.41	372
4.09	2.82	9.51	388
4.09	2.82	9.62	364
4.09	2.82	9.73	389

Planche 5

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
52400.

NOMBRE DE STANTON

TEMPERATURES AMONT/PAROÏ
2.85

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.25	2.84	.27	758
5.25	2.84	.38	695
5.25	2.84	.49	663
5.25	2.84	.59	622
5.25	2.84	.70	545
5.25	2.84	.80	494
5.25	2.84	.91	455
5.25	2.84	1.02	482
5.26	2.84	1.12	467
5.26	2.84	1.23	458
5.26	2.84	1.34	429
5.26	2.84	1.44	421
5.26	2.84	1.55	424
5.26	2.84	1.65	441
5.26	2.84	1.76	406
5.26	2.84	1.87	397
5.26	2.84	1.97	387
5.26	2.84	2.08	416
5.26	2.84	2.19	392
5.26	2.84	2.29	381
5.26	2.84	2.40	371
5.26	2.84	2.50	398
5.26	2.84	2.61	374
5.26	2.84	2.72	405
5.26	2.84	2.82	378
5.26	2.83	2.93	388
5.26	2.83	3.03	362
5.27	2.83	3.14	391
5.27	2.83	3.25	413
5.27	2.83	3.35	435

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.27	2.83	3.46	392
5.27	2.83	3.57	383
5.27	2.83	3.67	333
5.27	2.83	3.78	325
5.27	2.83	3.88	319
5.27	2.83	3.99	330
5.27	2.83	4.10	326
5.27	2.83	4.20	336
5.27	2.83	4.31	343
5.27	2.83	4.42	374
5.27	2.83	4.52	375
5.27	2.83	4.63	402
5.27	2.83	4.73	391
5.27	2.83	4.84	394
5.27	2.83	4.95	354
5.28	2.83	5.05	388
5.28	2.83	5.16	362
5.28	2.83	5.27	412
5.28	2.83	5.37	379
5.28	2.83	5.48	407
5.28	2.83	5.58	390
5.28	2.82	5.69	371
5.28	2.82	5.80	331
5.28	2.82	5.90	358
5.28	2.82	6.01	360
5.28	2.82	6.12	448
5.28	2.82	6.22	375
5.28	2.82	6.33	379
5.28	2.82	6.43	358
5.28	2.82	6.54	379

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
5.28	2.82	6.65	370
5.28	2.82	6.75	384
5.28	2.82	6.86	366
5.29	2.82	6.97	397
5.29	2.82	7.07	372
5.29	2.82	7.18	383
5.29	2.82	7.28	368
5.29	2.82	7.39	347
5.29	2.82	7.50	304
5.29	2.82	7.60	326
5.29	2.82	7.71	354
5.29	2.82	7.81	389
5.29	2.82	7.92	374
5.29	2.82	8.03	389
5.29	2.82	8.13	351
5.29	2.82	8.24	360
5.29	2.82	8.35	359
5.29	2.81	8.45	410
5.29	2.81	8.56	379
5.29	2.81	8.66	382
5.29	2.81	8.77	381
5.30	2.81	8.88	372
5.30	2.81	8.98	361
5.30	2.81	9.09	388
5.30	2.81	9.20	356
5.30	2.81	9.30	377
5.30	2.81	9.41	357
5.30	2.81	9.51	354
5.30	2.81	9.62	335
5.30	2.81	9.73	364

Planche 6

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
28600.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
2.86	3.50	.27	927
2.86	3.50	.38	861
2.86	3.50	.49	840
2.86	3.50	.59	764
2.87	3.49	.70	662
2.87	3.49	.80	573
2.87	3.49	.91	587
2.87	3.49	1.02	562
2.87	3.49	1.12	564
2.87	3.49	1.23	513
2.87	3.49	1.34	528
2.87	3.49	1.44	489
2.87	3.49	1.55	514
2.87	3.49	1.65	503
2.87	3.49	1.76	486
2.87	3.49	1.87	456
2.87	3.49	1.97	476
2.87	3.49	2.08	474
2.87	3.49	2.19	458
2.87	3.49	2.29	462
2.87	3.49	2.40	442
2.87	3.49	2.50	450
2.87	3.49	2.61	453
2.87	3.49	2.72	458
2.87	3.49	2.82	454
2.87	3.49	2.93	439
2.87	3.49	3.03	431
2.87	3.49	3.14	441
2.87	3.49	3.25	501
2.87	3.49	3.35	490

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
2.87	3.49	3.46	475
2.87	3.48	3.57	438
2.87	3.48	3.67	410
2.87	3.48	3.78	376
2.87	3.48	3.88	389
2.87	3.48	3.99	384
2.87	3.48	4.10	414
2.87	3.48	4.20	388
2.87	3.48	4.31	418
2.87	3.48	4.42	426
2.87	3.48	4.52	450
2.87	3.48	4.63	446
2.87	3.48	4.73	469
2.87	3.48	4.84	478
2.87	3.48	4.95	479
2.87	3.48	5.05	425
2.88	3.48	5.16	441
2.88	3.48	5.27	421
2.88	3.48	5.37	457
2.88	3.48	5.48	475
2.88	3.48	5.58	422
2.88	3.48	5.69	432
2.88	3.48	5.80	467
2.88	3.48	5.90	450
2.88	3.48	6.01	452
2.88	3.48	6.12	471
2.88	3.48	6.22	434
2.88	3.48	6.33	420
2.88	3.47	6.43	425
2.88	3.47	6.54	433

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.50

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
2.88	3.47	6.65	445
2.88	3.47	6.75	442
2.88	3.47	6.86	462
2.88	3.47	6.97	434
2.88	3.47	7.07	462
2.88	3.47	7.18	450
2.88	3.47	7.28	485
2.88	3.47	7.39	401
2.88	3.47	7.50	390
2.88	3.47	7.60	365
2.88	3.47	7.71	441
2.88	3.47	7.81	442
2.88	3.47	7.92	458
2.88	3.47	8.03	438
2.88	3.47	8.13	432
2.88	3.47	8.24	408
2.88	3.47	8.35	446
2.88	3.47	8.45	445
2.88	3.47	8.56	440
2.88	3.47	8.66	436
2.88	3.47	8.77	420
2.88	3.47	8.88	430
2.88	3.47	8.98	430
2.88	3.47	9.09	435
2.88	3.46	9.20	438
2.88	3.46	9.30	427
2.88	3.46	9.41	428
2.88	3.46	9.51	426
2.89	3.46	9.62	418
2.89	3.46	9.73	403

Planche 7

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
35800.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.26	3.49	.27	824
3.58	3.49	.38	799
3.58	3.49	.49	793
3.58	3.49	.59	698
3.58	3.49	.70	613
3.58	3.49	.80	537
3.58	3.49	.91	551
3.58	3.49	1.02	529
3.58	3.49	1.12	537
3.58	3.49	1.23	481
3.58	3.49	1.34	502
3.59	3.49	1.44	465
3.59	3.49	1.55	492
3.59	3.49	1.65	478
3.59	3.49	1.76	469
3.59	3.49	1.87	434
3.59	3.49	1.97	451
3.59	3.49	2.08	455
3.59	3.48	2.19	454
3.59	3.48	2.29	411
3.59	3.48	2.40	428
3.59	3.48	2.50	430
3.59	3.48	2.61	438
3.59	3.48	2.72	437
3.59	3.48	2.82	436
3.59	3.48	2.93	414
3.59	3.48	3.03	424
3.59	3.48	3.14	423
3.59	3.48	3.25	484
3.59	3.48	3.35	469

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.59	3.48	3.46	457
3.59	3.48	3.57	417
3.59	3.48	3.67	385
3.59	3.48	3.78	361
3.59	3.48	3.88	373
3.59	3.48	3.99	364
3.59	3.48	4.10	392
3.59	3.48	4.20	374
3.59	3.48	4.31	389
3.59	3.48	4.42	415
3.59	3.48	4.52	440
3.59	3.48	4.63	394
3.59	3.48	4.73	460
3.59	3.48	4.84	450
3.60	3.47	4.95	455
3.60	3.47	5.05	399
3.60	3.47	5.16	411
3.60	3.47	5.27	407
3.60	3.47	5.37	443
3.60	3.47	5.48	451
3.60	3.47	5.58	404
3.60	3.47	5.69	410
3.60	3.47	5.80	446
3.60	3.47	5.90	423
3.60	3.47	6.01	437
3.60	3.47	6.12	454
3.60	3.47	6.22	402
3.60	3.47	6.33	407
3.60	3.47	6.43	409
3.60	3.47	6.54	417

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.49

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
3.60	3.47	6.65	430
3.60	3.47	6.75	428
3.60	3.47	6.86	444
3.60	3.47	6.97	418
3.60	3.47	7.07	445
3.60	3.47	7.18	432
3.60	3.47	7.28	454
3.60	3.47	7.39	380
3.60	3.47	7.50	348
3.60	3.47	7.60	368
3.60	3.47	7.71	418
3.60	3.46	7.81	427
3.60	3.46	7.92	420
3.60	3.46	8.03	416
3.60	3.46	8.13	418
3.60	3.46	8.24	397
3.60	3.46	8.35	425
3.60	3.46	8.45	420
3.61	3.46	8.56	425
3.61	3.46	8.66	419
3.61	3.46	8.77	410
3.61	3.46	8.88	410
3.61	3.46	8.98	406
3.61	3.46	9.09	422
3.61	3.46	9.20	440
3.61	3.46	9.30	412
3.61	3.46	9.41	412
3.61	3.46	9.51	409
3.61	3.46	9.62	387
3.61	3.46	9.73	382

Planche 8

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
46100.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.62	3.49	.27	776
4.62	3.49	.38	761
4.62	3.49	.49	729
4.62	3.49	.59	655
4.62	3.49	.70	568
4.62	3.48	.80	511
4.62	3.48	.91	504
4.62	3.48	1.02	507
4.62	3.48	1.12	498
4.62	3.48	1.23	454
4.62	3.48	1.34	464
4.62	3.48	1.44	453
4.62	3.48	1.55	445
4.62	3.48	1.65	455
4.62	3.48	1.76	439
4.62	3.48	1.87	418
4.63	3.48	1.97	419
4.63	3.48	2.08	434
4.63	3.48	2.19	423
4.63	3.48	2.29	391
4.63	3.48	2.40	404
4.63	3.48	2.50	415
4.63	3.48	2.61	408
4.63	3.48	2.72	421
4.63	3.48	2.82	413
4.63	3.48	2.93	406
4.63	3.48	3.03	392
4.63	3.48	3.14	411
4.63	3.48	3.25	455
4.63	3.48	3.35	442

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.63	3.48	3.46	419
4.63	3.48	3.57	393
4.63	3.47	3.67	356
4.63	3.47	3.78	340
4.63	3.47	3.88	340
4.63	3.47	3.99	342
4.63	3.47	4.10	359
4.63	3.47	4.20	355
4.63	3.47	4.31	379
4.63	3.47	4.42	399
4.63	3.47	4.52	405
4.63	3.47	4.63	412
4.64	3.47	4.73	424
4.64	3.47	4.84	426
4.64	3.47	4.95	413
4.64	3.47	5.05	377
4.64	3.47	5.16	389
4.64	3.47	5.27	377
4.64	3.47	5.37	400
4.64	3.47	5.48	421
4.64	3.47	5.58	377
4.64	3.47	5.69	387
4.64	3.47	5.80	390
4.64	3.47	5.90	387
4.64	3.47	6.01	409
4.64	3.47	6.12	400
4.64	3.47	6.22	388
4.64	3.47	6.33	394
4.64	3.47	6.43	384
4.64	3.46	6.54	391

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.49

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.64	3.46	6.65	398
4.64	3.46	6.75	404
4.64	3.46	6.86	417
4.64	3.46	6.97	403
4.64	3.46	7.07	405
4.64	3.46	7.18	413
4.64	3.46	7.28	427
4.64	3.46	7.39	367
4.65	3.46	7.50	326
4.65	3.46	7.60	331
4.65	3.46	7.71	407
4.65	3.46	7.81	394
4.65	3.46	7.92	410
4.65	3.46	8.03	405
4.65	3.46	8.13	381
4.65	3.46	8.24	372
4.65	3.46	8.35	395
4.65	3.46	8.45	405
4.65	3.46	8.56	410
4.65	3.46	8.66	408
4.65	3.46	8.77	390
4.65	3.46	8.88	392
4.65	3.46	8.98	385
4.65	3.46	9.09	401
4.65	3.46	9.20	390
4.65	3.45	9.30	402
4.65	3.45	9.41	386
4.65	3.45	9.51	378
4.65	3.45	9.62	368
4.65	3.45	9.73	384

Planche 9

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
44000.

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.40	3.78	.27	801
4.40	3.78	.38	717
4.40	3.78	.49	721
4.41	3.78	.59	648
4.41	3.78	.70	586
4.41	3.78	.80	507
4.41	3.78	.91	496
4.41	3.78	1.02	497
4.41	3.78	1.12	506
4.41	3.78	1.23	468
4.41	3.78	1.34	474
4.41	3.78	1.44	451
4.41	3.78	1.55	466
4.41	3.78	1.65	465
4.41	3.78	1.76	451
4.41	3.78	1.87	405
4.41	3.78	1.97	438
4.41	3.78	2.08	452
4.41	3.78	2.19	438
4.41	3.78	2.29	400
4.41	3.77	2.40	418
4.41	3.77	2.50	417
4.41	3.77	2.61	429
4.41	3.77	2.72	427
4.41	3.77	2.82	427
4.41	3.77	2.93	407
4.41	3.77	3.03	408
4.41	3.77	3.14	409
4.41	3.77	3.25	476
4.41	3.77	3.35	449

NOMBRE DE STANTON

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.41	3.77	3.46	454
4.41	3.77	3.57	404
4.41	3.77	3.67	403
4.42	3.77	3.78	362
4.42	3.77	3.88	373
4.42	3.77	3.99	369
4.42	3.77	4.10	389
4.42	3.77	4.20	380
4.42	3.77	4.31	408
4.42	3.77	4.42	382
4.42	3.77	4.52	418
4.42	3.77	4.63	420
4.42	3.77	4.73	444
4.42	3.77	4.84	427
4.42	3.77	4.95	444
4.42	3.77	5.05	383
4.42	3.77	5.16	400
4.42	3.76	5.27	380
4.42	3.76	5.37	443
4.42	3.76	5.48	444
4.42	3.76	5.58	396
4.42	3.76	5.69	403
4.42	3.76	5.80	434
4.42	3.76	5.90	412
4.42	3.76	6.01	432
4.42	3.76	6.12	437
4.42	3.76	6.22	409
4.42	3.76	6.33	404
4.42	3.76	6.43	402
4.42	3.76	6.54	402

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.78

$10^{-4}RD$	TM/TP	X/H	10^5ST
4.42	3.76	6.65	420
4.42	3.76	6.75	409
4.42	3.76	6.86	428
4.43	3.76	6.97	412
4.43	3.76	7.07	444
4.43	3.76	7.18	425
4.43	3.76	7.28	444
4.43	3.76	7.39	366
4.43	3.76	7.50	333
4.43	3.76	7.60	338
4.43	3.76	7.71	416
4.43	3.76	7.81	414
4.43	3.76	7.92	412
4.43	3.76	8.03	412
4.43	3.75	8.13	402
4.43	3.75	8.24	385
4.43	3.75	8.35	418
4.43	3.75	8.45	420
4.43	3.75	8.56	410
4.43	3.75	8.66	408
4.43	3.75	8.77	386
4.43	3.75	8.88	400
4.43	3.75	8.98	406
4.43	3.75	9.09	410
4.43	3.75	9.20	413
4.43	3.75	9.30	399
4.43	3.75	9.41	404
4.43	3.75	9.51	412
4.43	3.75	9.62	409
4.43	3.75	9.73	395

Planche 10

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
33900.

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
3.39	3.78	.27	879
3.39	3.78	.38	857
3.39	3.78	.49	794
3.39	3.78	.59	732
3.39	3.78	.70	615
3.39	3.78	.80	541
3.39	3.78	.91	544
3.39	3.78	1.02	528
3.39	3.78	1.12	525
3.39	3.78	1.23	489
3.39	3.78	1.34	494
3.40	3.78	1.44	479
3.40	3.78	1.55	492
3.40	3.78	1.65	494
3.40	3.78	1.76	465
3.40	3.78	1.87	443
3.40	3.78	1.97	452
3.40	3.78	2.08	461
3.40	3.78	2.19	465
3.40	3.78	2.29	452
3.40	3.78	2.40	433
3.40	3.78	2.50	443
3.40	3.77	2.61	455
3.40	3.77	2.72	446
3.40	3.77	2.82	451
3.40	3.77	2.93	412
3.40	3.77	3.03	426
3.40	3.77	3.14	431
3.40	3.77	3.25	487
3.40	3.77	3.35	473

NOMBRE DE STANTON

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
3.40	3.77	3.46	454
3.40	3.77	3.57	432
3.40	3.77	3.67	405
3.40	3.77	3.78	376
3.40	3.77	3.88	381
3.40	3.77	3.99	377
3.40	3.77	4.10	406
3.40	3.77	4.20	385
3.40	3.77	4.31	417
3.40	3.77	4.42	409
3.40	3.77	4.52	443
3.40	3.77	4.63	439
3.40	3.77	4.73	475
3.40	3.77	4.84	465
3.40	3.77	4.95	474
3.40	3.77	5.05	408
3.40	3.77	5.16	419
3.40	3.77	5.27	418
3.40	3.77	5.37	438
3.40	3.76	5.48	464
3.41	3.76	5.58	426
3.41	3.76	5.69	424
3.41	3.76	5.80	461
3.41	3.76	5.90	437
3.41	3.76	6.01	456
3.41	3.76	6.12	419
3.41	3.76	6.22	423
3.41	3.76	6.33	418
3.41	3.76	6.43	420
3.41	3.76	6.54	423

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.79

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
3.41	3.76	6.65	447
3.41	3.76	6.75	430
3.41	3.76	6.86	451
3.41	3.76	6.97	437
3.41	3.76	7.07	455
3.41	3.76	7.18	445
3.41	3.76	7.28	459
3.41	3.76	7.39	386
3.41	3.76	7.50	349
3.41	3.76	7.60	347
3.41	3.76	7.71	429
3.41	3.76	7.81	444
3.41	3.76	7.92	420
3.41	3.76	8.03	434
3.41	3.76	8.13	420
3.41	3.76	8.24	398
3.41	3.75	8.35	434
3.41	3.75	8.45	435
3.41	3.75	8.56	430
3.41	3.75	8.66	437
3.41	3.75	8.77	430
3.41	3.75	8.88	424
3.41	3.75	8.98	426
3.41	3.75	9.09	430
3.41	3.75	9.20	428
3.41	3.75	9.30	427
3.41	3.75	9.41	412
3.41	3.75	9.51	407
3.41	3.75	9.62	420
3.42	3.75	9.73	422

Planche 11

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT
27200

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
2.73	3.78	.27	950
2.73	3.78	.38	904
2.73	3.78	.49	841
2.73	3.78	.59	783
2.73	3.78	.70	650
2.73	3.78	.80	556
2.73	3.78	.91	576
2.73	3.78	1.02	568
2.73	3.78	1.12	538
2.73	3.77	1.23	514
2.73	3.77	1.34	518
2.73	3.77	1.44	497
2.73	3.77	1.55	517
2.73	3.77	1.65	515
2.73	3.77	1.76	490
2.73	3.77	1.87	461
2.73	3.77	1.97	476
2.73	3.77	2.08	475
2.73	3.77	2.19	483
2.73	3.77	2.29	449
2.73	3.77	2.40	448
2.73	3.77	2.50	458
2.73	3.77	2.61	469
2.73	3.77	2.72	465
2.73	3.77	2.82	469
2.73	3.77	2.93	444
2.73	3.77	3.03	410
2.73	3.77	3.14	451
2.73	3.77	3.25	507
2.73	3.77	3.35	493

NOMBRE DE STANTON

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
2.73	3.77	3.46	477
2.73	3.77	3.57	448
2.73	3.77	3.67	423
2.73	3.77	3.78	388
2.73	3.77	3.88	397
2.73	3.77	3.99	393
2.73	3.76	4.10	423
2.73	3.76	4.20	400
2.73	3.76	4.31	434
2.73	3.76	4.42	433
2.73	3.76	4.52	462
2.73	3.76	4.63	457
2.73	3.76	4.73	490
2.73	3.76	4.84	485
2.74	3.76	4.95	493
2.74	3.76	5.05	432
2.74	3.76	5.16	432
2.74	3.76	5.27	433
2.74	3.76	5.37	459
2.74	3.76	5.48	480
2.74	3.76	5.58	444
2.74	3.76	5.69	441
2.74	3.76	5.80	479
2.74	3.76	5.90	461
2.74	3.76	6.01	471
2.74	3.76	6.12	436
2.74	3.76	6.22	439
2.74	3.76	6.33	433
2.74	3.76	6.43	437
2.74	3.76	6.54	444

TEMPERATURES AMONT/PAROI
3.78

10^{-4} RD	TM/TP	X/H	10^5 ST
2.74	3.76	6.65	460
2.74	3.76	6.75	457
2.74	3.76	6.86	474
2.74	3.75	6.97	431
2.74	3.75	7.07	481
2.74	3.75	7.18	463
2.74	3.75	7.28	489
2.74	3.75	7.39	406
2.74	3.75	7.50	372
2.74	3.75	7.60	377
2.74	3.75	7.71	441
2.74	3.75	7.81	460
2.74	3.75	7.92	460
2.74	3.75	8.03	449
2.74	3.75	8.13	442
2.74	3.75	8.24	413
2.74	3.75	8.35	458
2.74	3.75	8.45	450
2.74	3.75	8.56	495
2.74	3.75	8.66	450
2.74	3.75	8.77	437
2.74	3.75	8.88	439
2.74	3.75	8.98	447
2.74	3.75	9.09	404
2.74	3.75	9.20	453
2.74	3.75	9.30	379
2.74	3.75	9.41	450
2.74	3.75	9.51	423
2.74	3.75	9.62	439
2.74	3.74	9.73	443

Planche 12

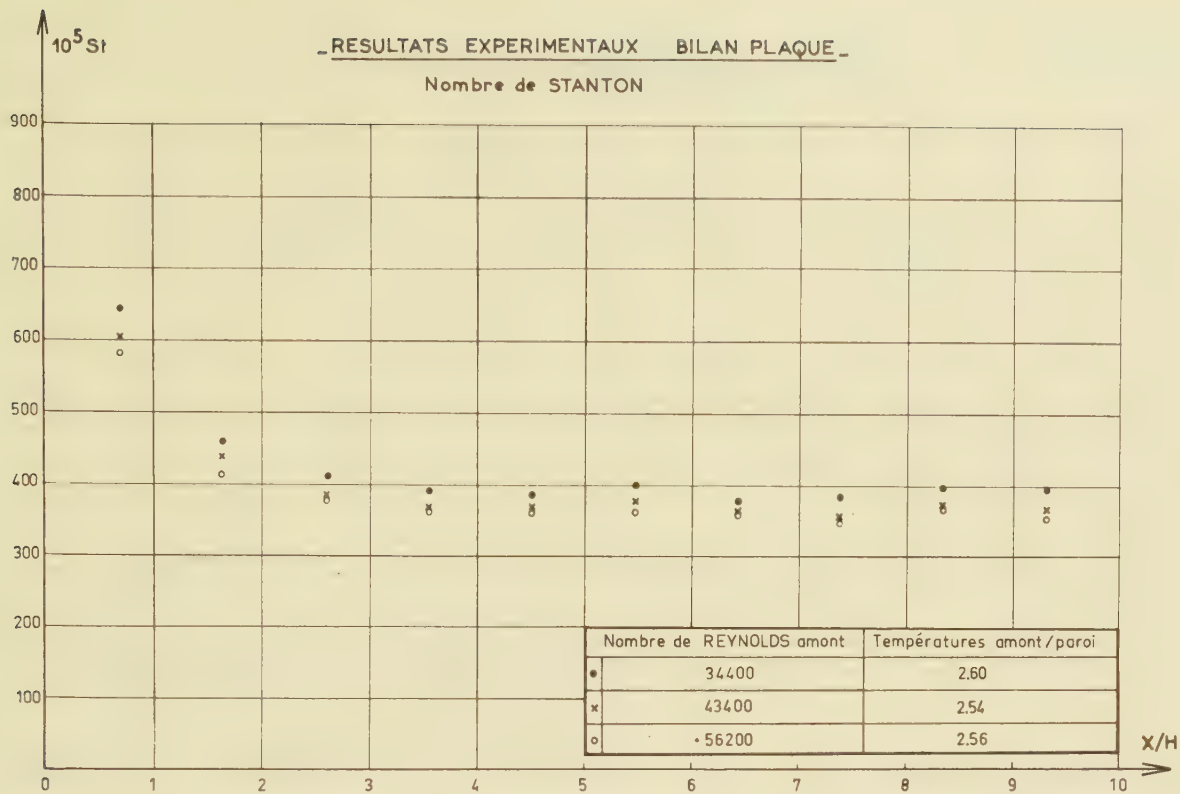


Planche 13

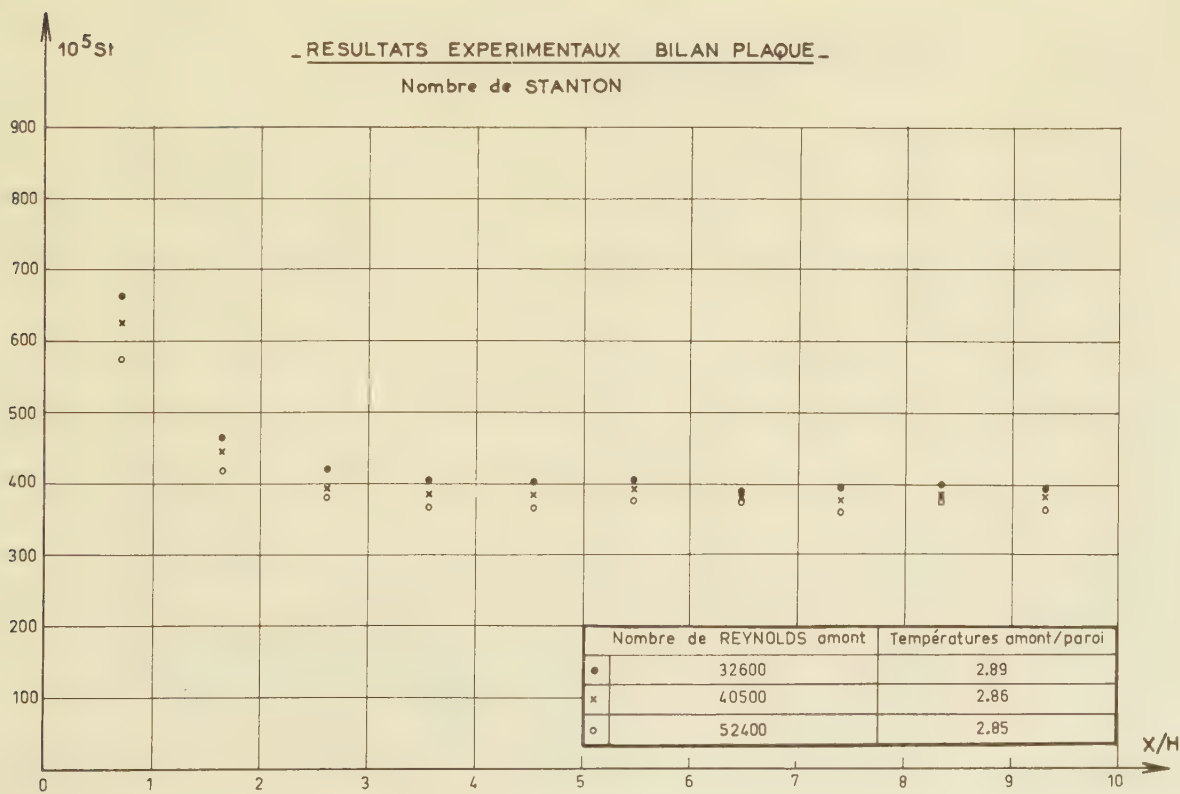


Planche 14

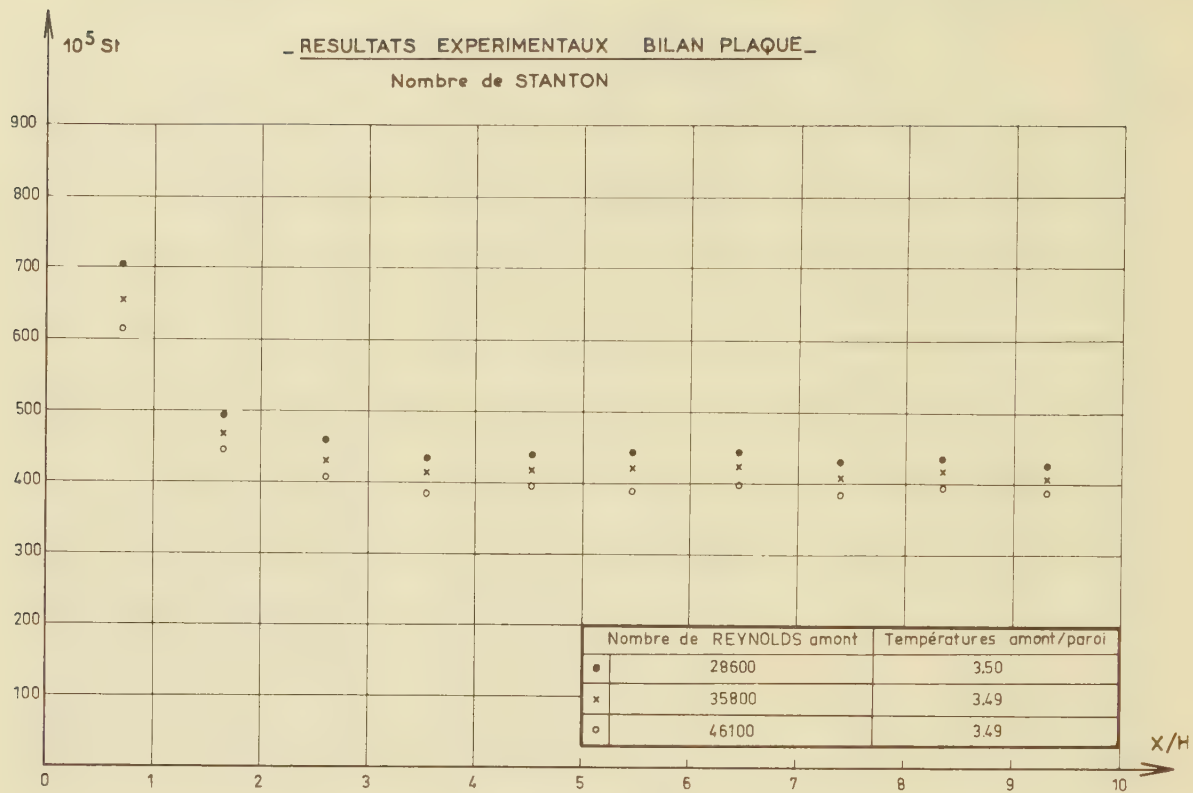


Planche 15

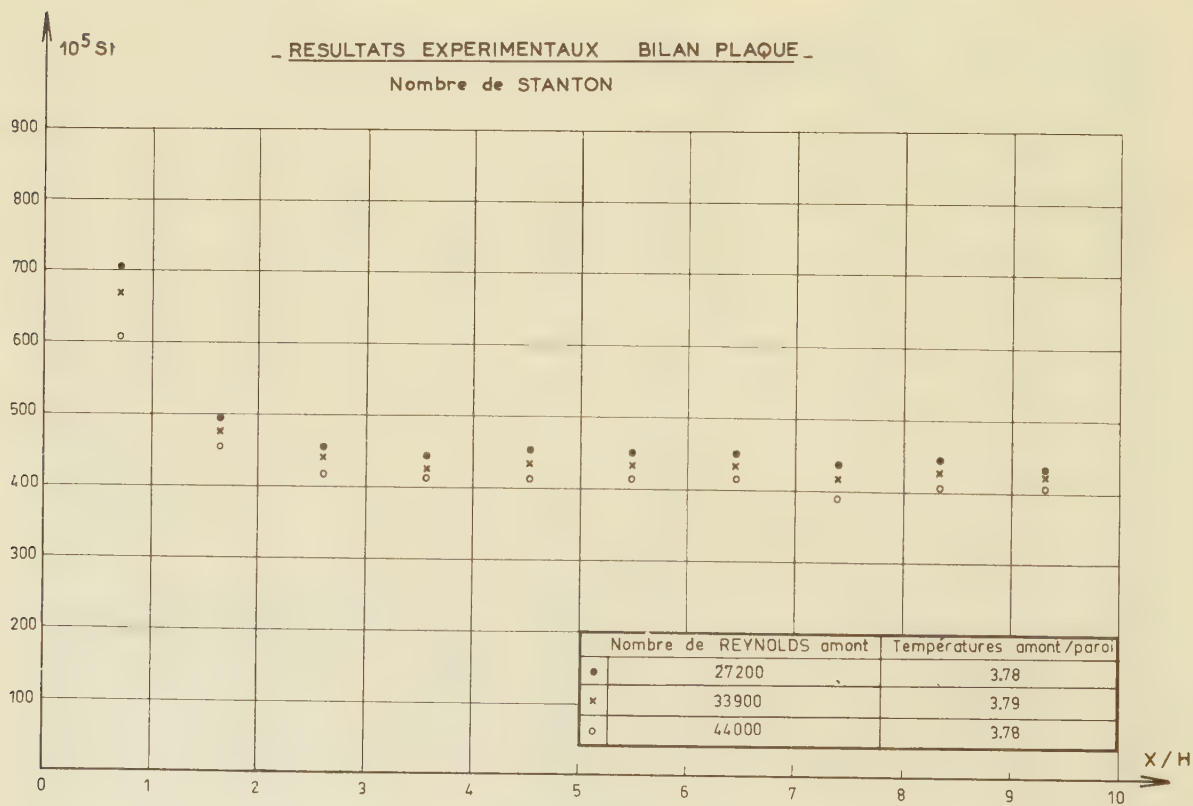


Planche 16

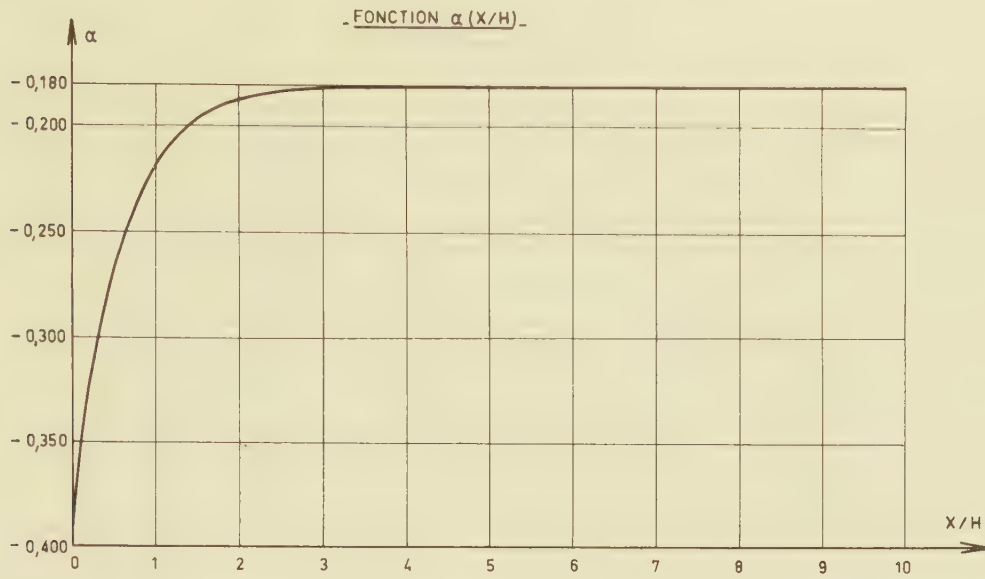


Planche 17

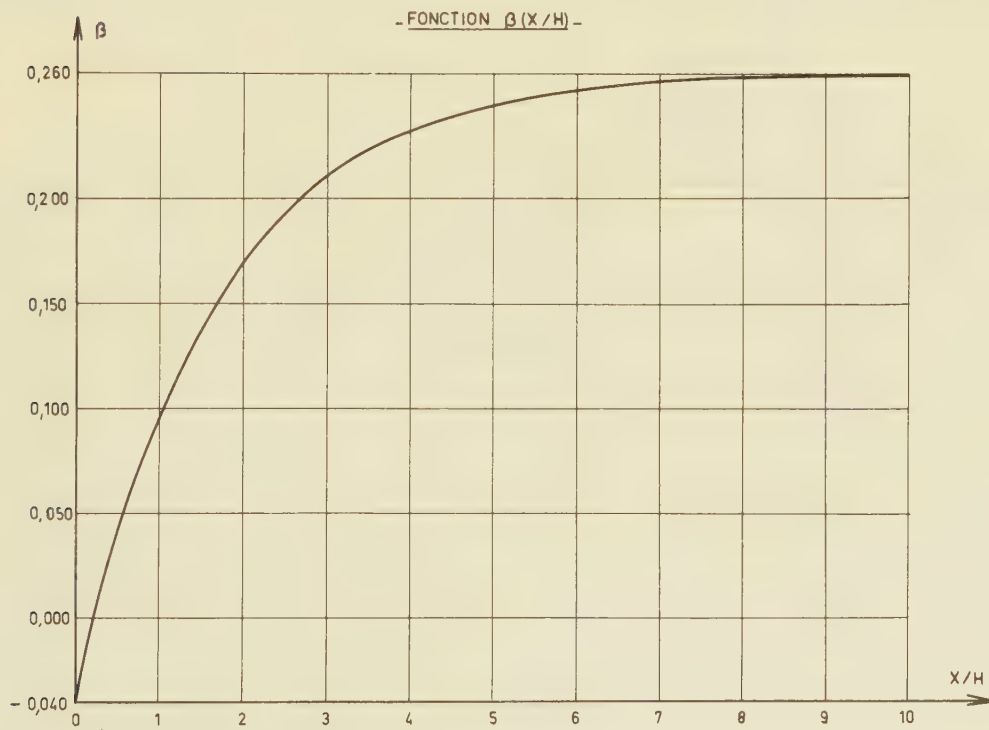


Planche 18

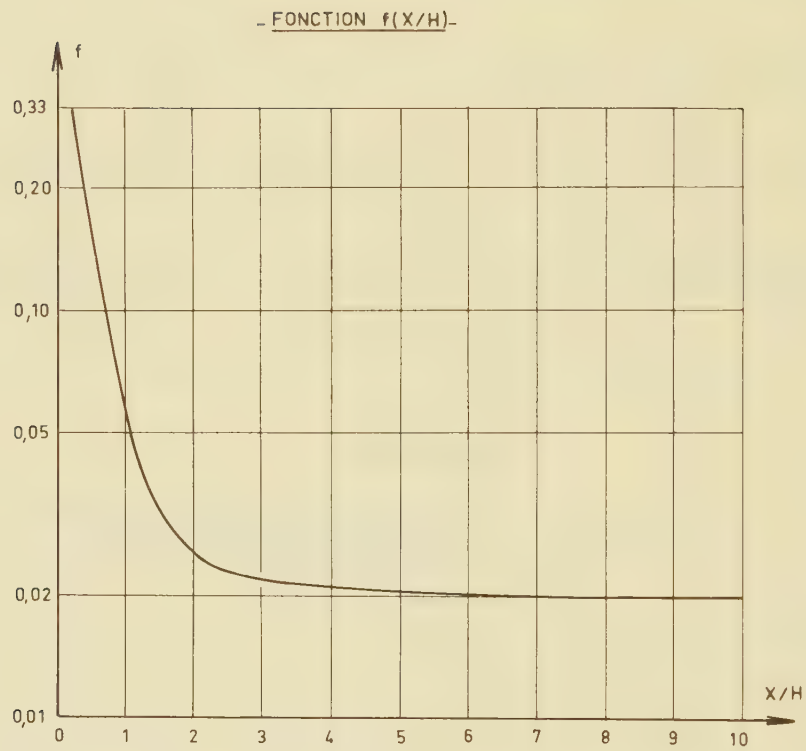


Planche 19

RESULTATS EXPERIMENTAUX BILAN AIR

PROFILS

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT TEMPERATURE AMONT/PAROI

40900.

2.50

X = .03 m			X = .08 m			X = .13 m			X = .18 m			X = .23 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
1.4	22.7	712	1.2	21.8	692	1.2	21.3	666	1.2	21.4	652	1.2	21.3	642
2.4	24.2	728	2.2	23.6	720	2.2	23.3	703	2.2	23.0	690	2.2	23.0	680
3.4	25.4	736	3.2	24.8	732	3.2	24.6	720	3.2	24.2	708	3.2	24.3	700
4.4	26.5	741	4.2	25.9	738	4.2	25.6	730	4.2	25.2	720	4.2	25.2	713
5.4	27.1	745	5.2	26.6	743	5.2	26.2	736	5.2	26.0	729	5.2	25.9	723
6.4	28.2	747	6.2	27.4	745	6.2	27.1	741	6.2	26.8	735	6.2	26.7	729
7.4	28.7	749	7.2	28.0	747	7.2	27.6	745	7.2	27.3	741	7.2	27.4	735
8.4	29.2	751	8.2	28.5	750	8.2	28.3	747	8.2	27.9	744	8.2	27.8	740
9.4	29.8	753	9.2	29.2	752	9.2	28.6	750	9.2	28.5	747	9.2	28.4	742
10.4	30.1	754	10.2	29.4	753	10.2	29.3	751	10.2	29.1	749	10.2	29.1	746
11.4	30.5	755	11.2	30.0	754	11.2	29.5	752	11.2	29.3	751	11.2	29.2	749
12.4	31.0	756	12.2	30.3	755	12.2	29.9	753	12.2	29.9	752	12.2	29.6	750
13.4	31.4	756	13.2	30.6	755	13.2	30.4	755	13.2	30.2	753	13.2	29.9	751
14.4	31.6	757	14.2	30.9	756	14.2	30.6	756	14.2	30.4	754	14.2	30.3	753
19.4	32.5	759	19.2	31.1	759	19.2	31.8	758	19.2	31.5	757	19.2	31.4	757
24.4	33.1	760	24.2	32.7	760	24.2	32.4	759	24.2	32.3	759	24.2	32.3	758
29.4	33.4	761	29.2	33.0	760	29.2	32.7	760	29.2	32.6	759	29.2	32.6	759
34.4	33.5	761	34.2	33.2	760	34.2	33.1	760	34.2	33.0	759	34.2	32.9	759
39.4	33.6	761	39.2	33.3	760	39.2	33.2	760	39.2	33.1	760	39.2	33.1	760
44.4	33.6	761	44.2	33.3	761	44.2	33.2	760	44.2	33.1	760	44.2	33.2	760
49.4	33.7	761	49.2	33.3	761	49.2	33.2	760	49.2	33.2	760	49.2	33.2	760

Planche 20

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT TEMPERATURE AMONT/PAROI

40900.

2.50

X = .28 m			X = .33 m			X = .38 m			X = .43 m			X = .48 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
1.2	21.4	637	1.2	21.0	635	1.3	22.6	632	1.3	21.1	629	1.4	21.2	626
2.2	22.9	674	2.2	22.9	668	2.3	23.3	664	2.3	22.7	659	2.4	22.7	655
3.2	24.1	693	3.2	24.1	686	3.3	24.0	682	3.3	23.9	677	3.4	23.8	674
4.2	25.1	707	4.2	24.9	701	4.3	25.0	696	4.3	24.9	691	4.4	24.6	687
5.2	25.9	717	5.2	25.7	711	5.3	25.6	707	5.3	25.5	701	5.4	25.5	698
6.2	26.5	723	6.2	26.5	719	6.3	26.3	714	6.3	26.3	709	6.4	26.2	706
7.2	27.2	730	7.2	27.0	726	7.3	27.1	723	7.3	26.8	718	7.4	26.7	713
8.2	27.6	735	8.2	27.6	731	8.3	27.5	728	8.3	27.4	724	8.4	27.2	720
9.2	28.2	740	9.2	28.1	736	9.3	28.0	731	9.3	27.9	729	9.4	27.7	725
10.2	28.7	742	10.2	28.5	740	10.3	28.4	736	10.3	28.3	734	10.4	28.1	730
11.2	29.0	745	11.2	29.0	742	11.3	28.9	740	11.3	28.7	736	11.4	28.7	734
12.2	29.5	747	12.2	29.4	745	12.3	29.2	742	12.3	29.1	740	12.4	29.0	737
13.2	29.7	750	13.2	29.7	747	13.3	29.6	746	13.3	29.4	742	13.4	29.4	741
14.2	30.1	751	14.2	30.0	750	14.3	29.9	747	14.3	29.8	745	14.4	29.7	744
19.2	31.4	756	19.2	31.2	755	19.3	31.2	755	19.3	31.1	753	19.4	31.1	752
24.2	32.1	758	24.2	32.0	757	24.3	31.9	757	24.3	31.8	756	24.4	31.8	755
29.2	32.6	759	29.2	32.5	759	29.3	32.4	759	29.3	32.3	758	29.4	32.3	757
34.2	32.8	759	34.2	32.8	759	34.3	32.7	759	34.3	32.7	759	34.4	32.7	758
39.2	33.0	759	39.2	33.0	759	39.3	32.9	759	39.3	32.8	759	39.4	32.8	759
44.2	33.1	760	44.2	33.1	759	44.3	33.0	759	44.3	33.0	759	44.4	33.0	759
49.2	33.1	760	49.2	33.1	760	49.3	33.1	759	49.3	33.1	759	49.4	33.0	759

Planche 21

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT

TEMPERATURE AMONT/PAROI

38500.

2.80

X = .03 m			X = .08 m			X = .13 m			X = .18 m			X = .23 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
1.0	23.8	780	.7	23.5	725	.7	22.1	696	.7	21.5	682	.7	22.2	675
2.0	26.7	807	1.7	26.2	797	1.7	25.8	776	1.7	25.9	760	1.7	25.7	750
3.0	27.7	820	2.7	27.2	815	2.7	26.9	800	2.7	26.9	786	2.7	26.8	776
4.0	29.0	828	3.7	28.4	824	3.7	28.2	813	3.7	28.1	803	3.7	28.0	793
5.0	29.8	833	4.7	29.1	832	4.7	29.0	823	4.7	28.9	814	4.7	28.9	806
6.0	31.0	836	5.7	30.3	835	5.7	30.0	830	5.7	29.9	823	5.7	29.8	815
7.0	31.6	840	6.7	31.0	838	6.7	30.5	834	6.7	30.5	829	6.7	30.5	823
8.0	32.7	843	7.7	32.0	841	7.7	31.5	838	7.7	31.3	833	7.7	31.3	829
9.0	33.0	844	8.7	32.3	844	8.7	31.7	841	8.7	31.5	838	8.7	31.6	834
10.0	33.6	847	9.7	32.9	845	9.7	32.4	843	9.7	32.3	840	9.7	32.2	838
11.0	34.1	848	10.7	33.3	846	10.7	32.9	844	10.7	32.8	843	10.7	32.7	841
12.0	34.3	850	11.7	33.7	847	11.7	33.3	846	11.7	32.2	845	11.7	33.1	844
13.0	34.8	851	12.7	34.2	848	12.7	33.8	848	12.7	33.6	847	12.7	33.5	845
14.0	35.1	852	13.7	34.5	850	13.7	34.0	849	13.7	33.9	848	13.7	33.8	848
15.0	35.6	853	14.7	35.0	851	14.7	34.6	850	14.7	34.5	849	14.7	34.3	849
20.0	36.6	856	19.7	36.1	854	19.7	35.7	854	19.7	35.6	853	19.7	35.5	854
25.0	37.3	858	24.7	37.0	856	24.7	36.6	856	24.7	36.5	855	24.7	36.4	856
30.0	37.7	858	29.7	37.3	857	29.7	37.0	857	29.7	36.9	857	29.7	36.9	858
35.0	37.8	859	34.7	37.4	858	34.7	37.2	858	34.7	37.2	857	34.7	37.2	859
40.0	37.9	859	39.7	37.6	858	39.7	37.4	858	39.7	37.4	858	39.7	37.4	860
45.0	37.9	859	44.7	37.7	858	44.7	37.5	858	44.7	37.5	858	44.7	37.5	860
50.0	38.0	859	49.7	37.7	858	49.7	37.5	858	49.7	37.5	858	49.7	37.5	860

Planche 22

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT

TEMPERATURE AMONT/PAROI

38500.

2.80

X = .28 m			X = .33 m			X = .38 m			X = .43 m			X = .48 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
.8	22.7	677	.8	21.9	677	.9	22.7	679	1.0	22.7	677	1.0	22.5	663
1.8	26.0	744	1.8	25.6	738	1.9	26.0	731	2.0	25.8	724	2.0	25.8	718
2.8	26.6	769	2.8	26.6	763	2.9	26.8	756	3.0	26.7	750	3.0	26.7	743
3.8	27.9	786	3.8	27.8	780	3.9	27.7	774	4.0	27.7	766	4.0	27.7	750
4.8	28.8	800	4.8	28.7	792	4.9	28.7	786	5.0	28.6	780	5.0	28.6	774
5.8	29.7	809	5.8	29.6	802	5.9	29.6	797	6.0	29.6	791	6.0	29.3	785
6.8	30.3	818	6.8	30.2	811	6.9	30.2	806	7.0	30.2	801	7.0	30.0	795
7.8	31.1	824	7.8	31.0	819	7.9	31.0	814	8.0	30.9	809	8.0	30.9	802
8.8	31.5	830	8.8	31.5	825	8.9	31.6	820	9.0	31.4	815	9.0	31.3	810
9.8	32.1	834	9.8	32.0	831	9.9	32.0	825	10.0	32.0	821	10.0	31.7	816
10.8	32.5	838	10.8	32.5	835	10.9	32.5	830	11.0	32.4	826	11.0	32.2	821
11.8	33.0	840	11.8	32.9	839	11.9	32.7	834	12.0	32.7	830	12.0	32.6	825
12.8	33.4	844	12.8	33.3	841	12.9	33.2	836	13.0	33.1	834	13.0	33.0	830
13.8	33.7	846	13.8	33.6	844	13.9	33.6	840	14.0	33.3	836	14.0	33.3	832
14.8	34.2	848	14.8	34.0	846	14.9	33.9	842	15.0	33.8	839	15.0	33.8	836
19.8	35.6	854	19.8	35.5	853	19.9	35.5	851	20.0	35.3	849	20.0	35.2	846
24.8	36.4	856	24.8	36.3	857	24.9	36.3	855	25.0	36.2	854	25.0	36.1	852
29.8	36.9	858	29.8	36.8	858	29.9	36.8	857	30.0	36.7	856	30.0	36.7	855
34.8	37.2	859	34.8	37.1	859	34.9	37.1	858	35.0	37.1	858	35.0	37.0	857
39.8	37.4	860	39.8	37.4	860	39.9	37.4	859	40.0	37.4	859	40.0	37.2	858
44.8	37.5	860	44.8	37.5	860	44.9	37.5	860	45.0	37.5	859	45.0	37.5	858
49.8	37.5	860	49.8	37.5	860	49.9	37.5	860	50.0	37.5	859	50.0	37.5	858

Planche 23

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT

TEMPERATURE AMONT/PAROI

33100.

3.40 .

X = .03 m			X = .08 m			X = .13 m			X = .18 m			X = .23 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
.7	22.2	850	1.5	32.1	938	1.5	32.0	901	1.5	31.1	884	1.5	30.6	873
1.7	31.2	930	2.5	32.7	975	2.5	32.5	951	2.5	32.1	933	2.5	32.0	919
2.7	32.7	964	3.5	34.0	990	3.5	33.7	974	3.5	33.1	961	3.5	33.3	947
3.7	34.3	980	4.5	35.0	1002	4.5	35.0	989	4.5	34.6	977	4.5	34.5	966
4.7	35.6	992	5.5	36.2	1008	5.5	35.9	998	5.5	35.5	989	5.5	35.4	981
5.7	36.6	1001	6.5	36.8	1013	6.5	36.8	1007	6.5	36.5	998	6.5	36.4	990
6.7	37.5	1007	7.5	38.1	1018	7.5	37.9	1012	7.5	37.0	1007	7.5	37.3	1000
7.7	38.7	1012	8.5	38.6	1021	8.5	38.3	1016	8.5	38.0	1012	8.5	37.9	1007
8.7	39.1	1017	9.5	39.1	1023	9.5	38.9	1020	9.5	38.7	1018	9.5	38.5	1012
9.7	39.9	1021	10.5	39.9	1026	10.5	39.6	1023	10.5	39.1	1021	10.5	39.0	1018
10.7	40.5	1024	11.5	40.5	1027	11.5	40.3	1025	11.5	40.2	1024	11.5	39.7	1022
11.7	41.2	1026	12.5	41.0	1030	12.5	40.6	1028	12.5	40.2	1027	12.5	39.9	1024
12.7	41.8	1028	13.5	41.3	1032	13.5	41.2	1029	13.5	40.5	1028	13.5	40.5	1026
13.7	42.3	1030	18.5	43.2	1037	18.5	43.0	1036	18.5	42.9	1035	18.5	42.5	1034
18.7	43.8	1036	23.5	44.3	1039	23.5	44.1	1039	23.5	43.6	1038	23.5	43.7	1038
23.7	44.8	1039	28.5	44.8	1040	28.5	44.8	1041	28.5	44.5	1040	28.5	44.4	1040
28.7	45.3	1041	33.5	45.2	1041	33.5	45.1	1041	33.5	44.9	1041	33.5	44.7	1041
33.7	45.7	1042	38.5	45.3	1041	38.5	45.3	1041	38.5	45.0	1042	38.5	45.1	1042
38.7	45.8	1042	43.5	45.4	1041	43.5	45.3	1042	43.5	45.1	1042	43.5	45.2	1042
43.7	45.8	1042	48.5	45.5	1041	48.5	45.4	1042	48.5	45.2	1042	48.5	45.3	1042
48.7	45.9	1043												

Planche 24

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT

TEMPERATURE AMONT/PAROI

33100.

3.40

X = .28 m			X = .33 m			X = .38 m			X = .43 m			X = .48 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
1.5	30.9	863	1.6	30.5	858	.6	22.8	717	.7	23.5	720	.7	22.9	733
2.5	31.9	909	2.6	32.0	901	1.6	30.8	853	1.7	31.3	846	1.7	30.8	844
3.5	33.5	937	3.6	33.2	927	2.6	31.7	896	2.7	31.8	889	2.7	31.8	887
4.5	34.5	955	4.6	34.3	947	3.6	33.1	922	3.7	33.2	915	3.7	33.4	910
5.5	35.4	971	5.6	35.2	962	4.6	34.1	941	4.7	34.1	934	4.7	34.4	930
6.5	36.2	982	6.6	35.9	975	5.6	35.2	956	5.7	35.2	948	5.7	35.2	946
7.5	37.1	993	7.6	37.1	985	6.6	36.0	968	6.7	36.2	962	6.7	36.1	959
8.5	37.5	1001	8.6	37.3	994	7.6	36.5	979	7.7	36.6	972	7.7	36.8	970
9.5	38.3	1007	9.6	38.2	999	8.6	37.4	989	8.6	37.4	983	8.7	37.4	979
10.5	38.9	1012	10.6	39.0	1006	9.6	37.9	995	9.7	38.0	990	9.7	38.3	987
11.5	39.3	1016	11.6	39.4	1012	10.6	38.4	1003	10.7	38.7	996	10.7	38.6	995
12.5	39.9	1020	12.6	39.8	1016	11.6	39.2	1008	11.7	39.3	1004	11.7	39.2	1001
13.5	40.3	1023	13.6	40.3	1020	12.6	39.4	1013	12.7	39.5	1008	12.7	39.5	1006
18.5	42.4	1032	18.6	42.3	1031	13.6	40.1	1017	13.7	40.2	1013	13.7	40.2	1012
23.5	43.5	1037	23.6	43.3	1036	18.6	41.9	1030	18.7	42.0	1028	18.7	41.8	1027
28.5	44.2	1039	28.6	44.0	1039	23.6	43.3	1036	23.7	43.3	1035	23.7	43.4	1036
33.5	44.6	1040	33.6	44.6	1040	28.6	43.9	1039	28.7	44.1	1038	28.7	44.1	1040
38.5	45.0	1041	38.6	44.9	1041	33.6	44.6	1041	33.7	44.5	1041	33.7	44.6	1042
43.5	45.1	1041	43.6	45.1	1041	38.6	44.9	1042	38.7	44.9	1042	38.7	45.0	1043
48.5	45.2	1041	48.6	45.2	1041	43.6	45.0	1043	43.7	45.1	1042	43.7	45.1	1043
						48.6	45.2	1043	48.7	45.2	1043	48.7	45.2	1045

Planche 25

RESULTATS EXPERIMENTAUX BILAN AIR

PROFILS

NOMBRE DE REYNOLDS AMONT TEMPERATURE AMONT/PAROI

32200.

3.70

X = .03 m			X = .08 m			X = .13 m			X = .18 m			X = .23 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
.9	28.1	921	.6	24.5	832	.6	24.4	778	.6	24.6	764	.6	25.2	759
1.9	33.3	989	1.6	32.5	1014	1.6	32.6	978	1.6	32.8	957	1.6	33.2	943
2.9	35.4	1026	2.6	35.3	1049	2.6	35.3	1025	2.6	25.1	1006	2.6	35.3	990
3.9	37.0	1047	3.6	36.9	1065	3.6	36.7	1050	3.6	36.5	1032	3.6	37.0	1018
4.9	38.7	1060	4.6	38.2	1075	4.6	38.0	1064	4.6	37.8	1050	4.6	38.0	1039
5.9	39.7	1070	5.6	39.4	1082	5.6	39.3	1076	5.6	39.2	1064	5.6	39.2	1053
6.9	41.0	1078	6.6	40.5	1089	6.6	40.2	1083	6.6	39.9	1074	6.6	40.0	1064
7.9	42.0	1084	7.6	41.3	1093	7.6	41.1	1090	7.6	40.8	1082	7.6	41.0	1074
8.9	42.9	1089	8.6	42.4	1098	8.6	42.0	1094	8.6	41.6	1089	8.6	42.0	1082
9.9	43.7	1094	9.6	43.1	1102	9.6	42.6	1098	9.6	42.2	1094	9.6	42.6	1088
10.9	44.2	1099	10.6	43.7	1105	10.6	43.3	1102	10.6	42.9	1098	10.6	43.0	1093
11.9	44.9	1103	11.6	44.4	1107	11.6	43.5	1105	11.6	43.6	1100	11.6	43.8	1097
12.9	45.4	1105	12.6	45.1	1108	12.6	44.6	1107	12.6	44.1	1104	12.6	44.2	1100
13.9	46.1	1107	13.6	45.3	1111	13.6	45.0	1110	13.6	44.8	1106	13.6	44.8	1104
18.9	47.9	1114	18.6	46.8	1118	18.6	46.7	1117	18.6	46.6	1115	18.6	46.7	1113
23.9	48.9	1119	23.6	48.2	1121	23.6	48.2	1121	23.6	47.8	1120	23.6	48.0	1119
28.9	49.5	1123	28.6	49.5	1123	28.6	48.7	1123	28.6	48.8	1122	28.6	48.8	1121
33.9	49.9	1124	33.6	49.8	1124	33.6	49.1	1125	33.6	49.2	1124	33.6	48.9	1123
38.9	50.0	1125	38.6	50.0	1125	38.6	49.3	1125	38.6	49.4	1125	38.6	49.3	1124
43.9	50.1	1125	43.6	49.6	1125	43.6	49.5	1125	43.6	49.4	1125	43.6	49.4	1124
48.9	50.1	1126	48.6	49.7	1125	48.6	49.5	1125	48.6	49.4	1125	48.6	49.4	1125

Planche 26

RESULTATS EXPERIMENTAUX BILAN AIR

PROFILS

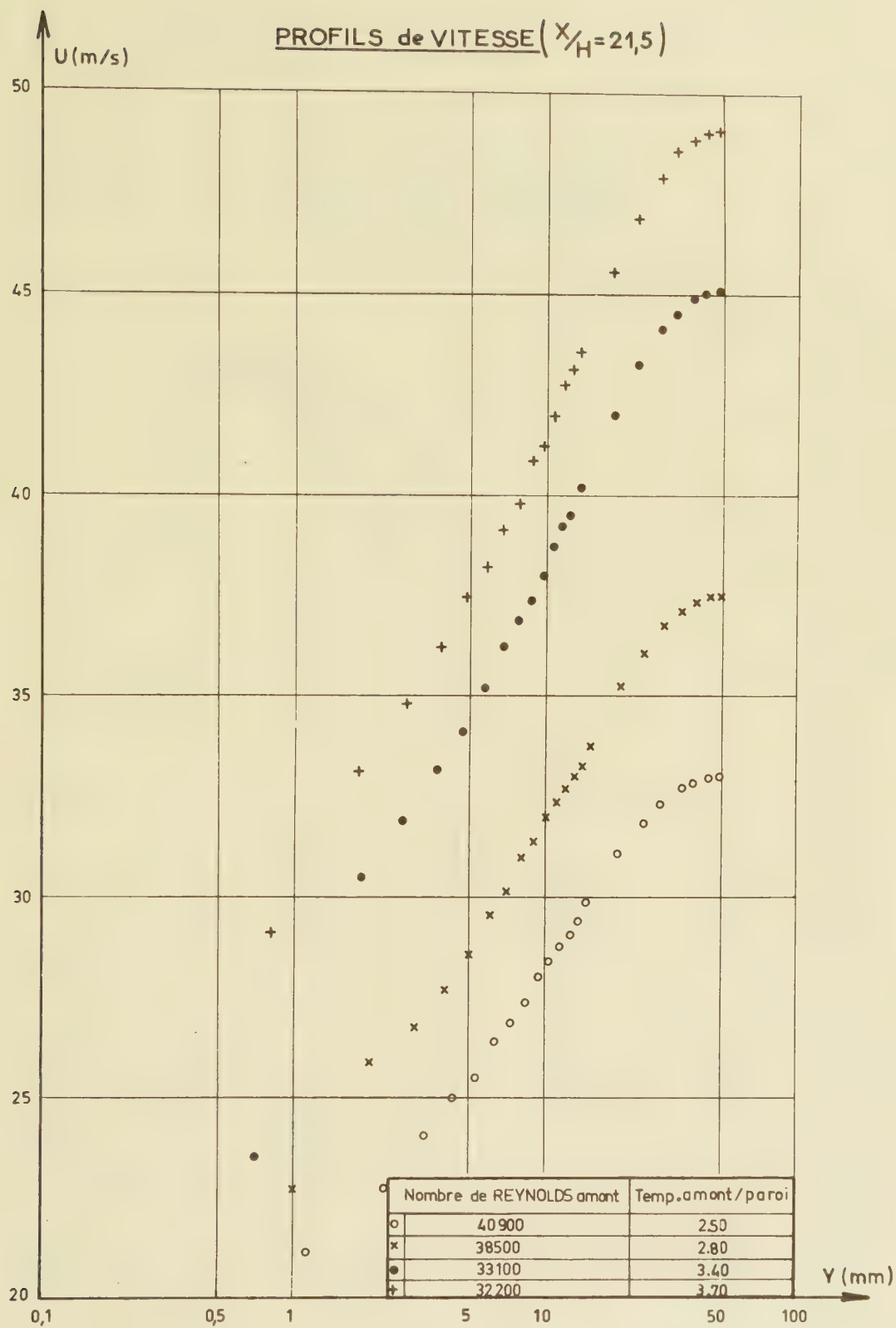
NOMBRE DE REYNOLDS AMONT TEMPERATURE AMONT/PAROI

32200.

3.70

X = .28 m			X = .33 m			X = .38 m			X = .43 m			X = .48 m		
Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K	Y mm	U m/s	T °K
.7	25.3	778	.7	28.0	793	.8	28.3	804	.8	29.1	815	.9	29.1	824
1.7	33.1	993	1.7	32.6	923	1.8	32.9	916	1.8	33.1	914	1.9	32.8	911
2.7	35.2	978	2.7	34.9	968	2.8	34.6	959	2.8	34.9	952	2.9	34.7	948
3.7	36.3	1007	3.7	36.3	993	3.8	36.1	987	3.8	36.2	979	3.9	35.9	974
4.7	37.5	1028	4.7	37.5	1015	4.8	37.2	1010	4.8	37.5	1001	4.9	37.1	995
5.7	39.1	1043	5.7	38.5	1033	5.8	38.5	1025	5.8	38.2	1018	5.9	38.0	1010
6.7	39.5	1053	6.7	39.5	1046	6.8	39.4	1037	6.8	39.2	1030	6.9	39.1	1023
7.7	40.6	1062	7.7	40.1	1055	7.8	39.6	1049	7.8	39.8	1043	7.9	39.9	1037
8.7	41.5	1071	8.7	41.0	1065	8.8	40.9	1058	8.8	40.9	1051	8.9	40.6	1045
9.7	42.1	1079	9.7	41.6	1072	9.8	41.2	1067	9.8	41.4	1061	9.9	41.1	1057
10.7	42.5	1085	10.7	42.4	1079	10.8	42.0	1073	10.8	42.0	1068	10.9	41.7	1063
11.7	43.2	1089	11.7	42.9	1085	11.8	42.7	1080	11.8	42.7	1075	11.9	42.4	1070
12.7	43.6	1093	12.7	43.1	1089	12.8	43.1	1085	12.8	43.2	1080	12.9	42.9	1076
13.7	44.3	1097	13.7	44.0	1094	13.8	43.6	1090	13.8	43.6	1086	13.9	43.4	1081
18.7	46.1	1109	18.7	45.9	1107	18.8	45.5	1105	18.8	45.5	1102	18.9	45.4	1100
23.7	47.5	1115	23.7	47.2	1114	23.8	46.9	1112	23.8	47.0	1111	23.9	46.8	1110
28.7	48.2	1118	28.7	48.1	1118	28.8	47.8	1117	28.8	47.9	1116	28.9	47.8	1116
33.7	48.6	1120	33.7	48.5	1120	33.8	48.4	1119	33.8	48.6	1119	33.9	48.3	1119
38.7	49.1	1121	38.7	49.0	1121	38.8	48.6	1121	38.8	48.8	1120	38.9	48.7	1121
43.7	49.2	1121	43.7	49.2	1121	43.8	49.0	1121	43.8	49.2	1121	43.9	48.9	1122
48.7	49.3	1122	48.7	49.2	1122	48.8	49.2	1122	48.8	49.2	1121	48.9	49.2	1122

Planche 27



PROFILS de TEMPERATURE

Nombre de REYNOLDS amont - 40900

Temperature amont / paroi - 2.50 -

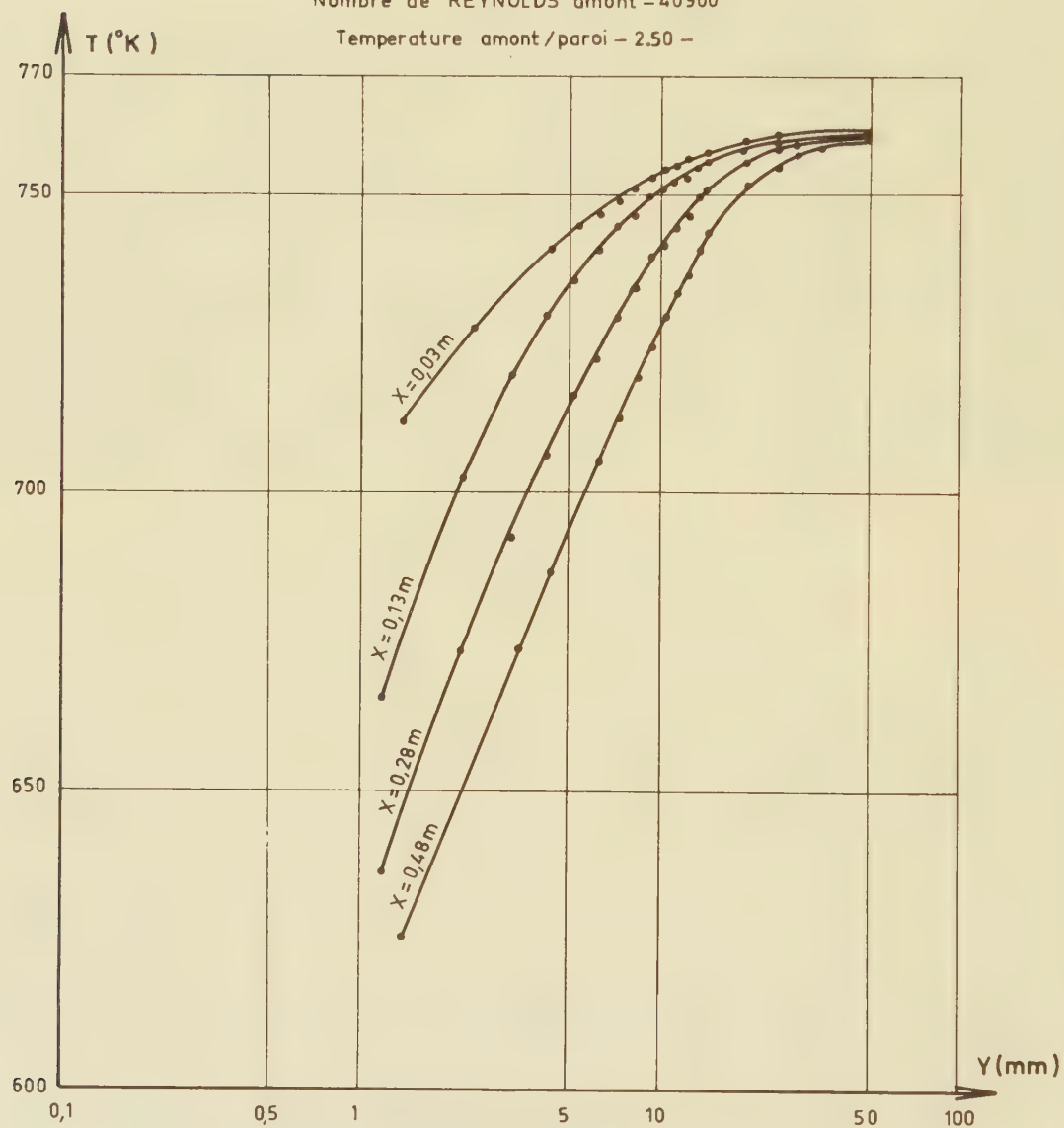
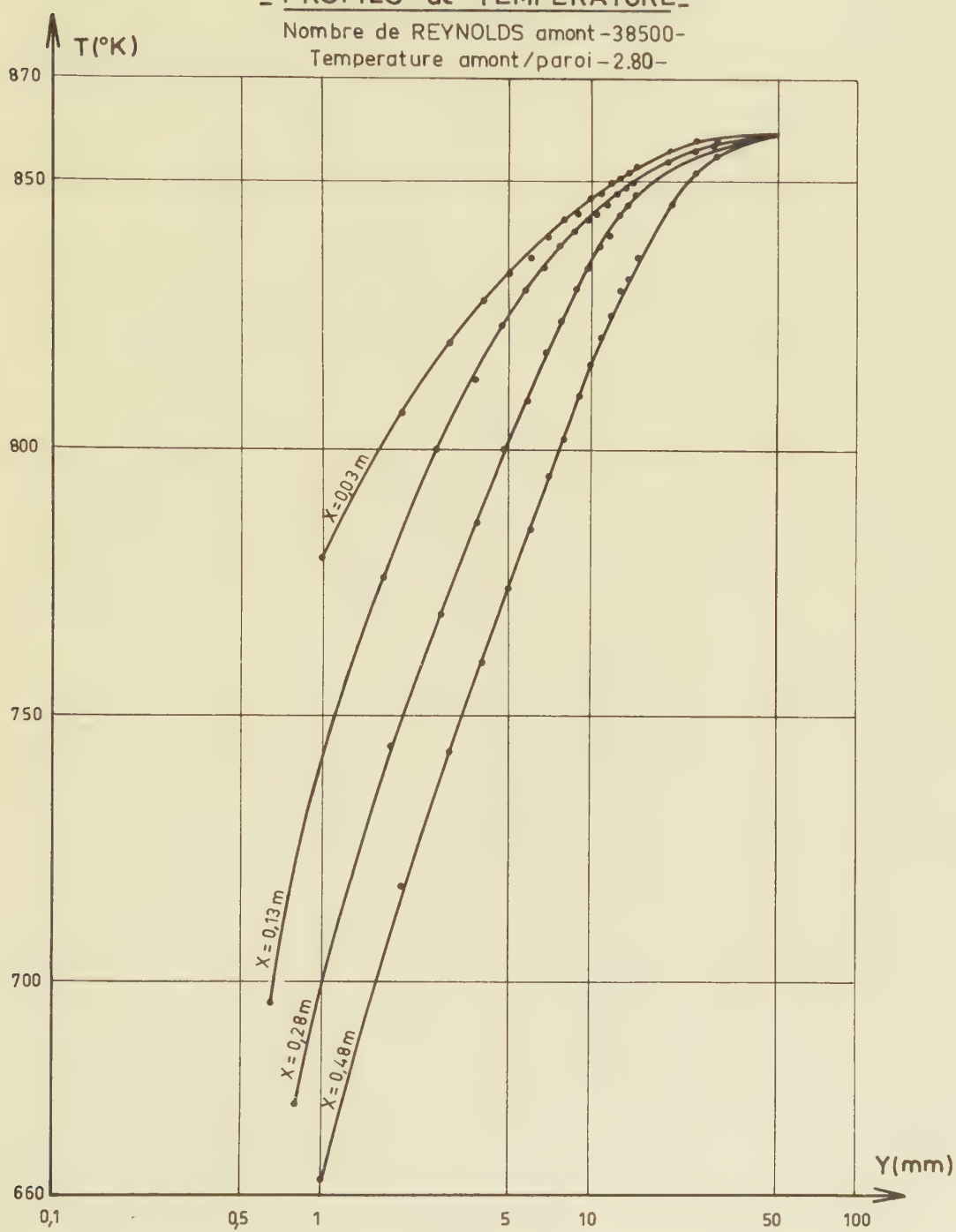


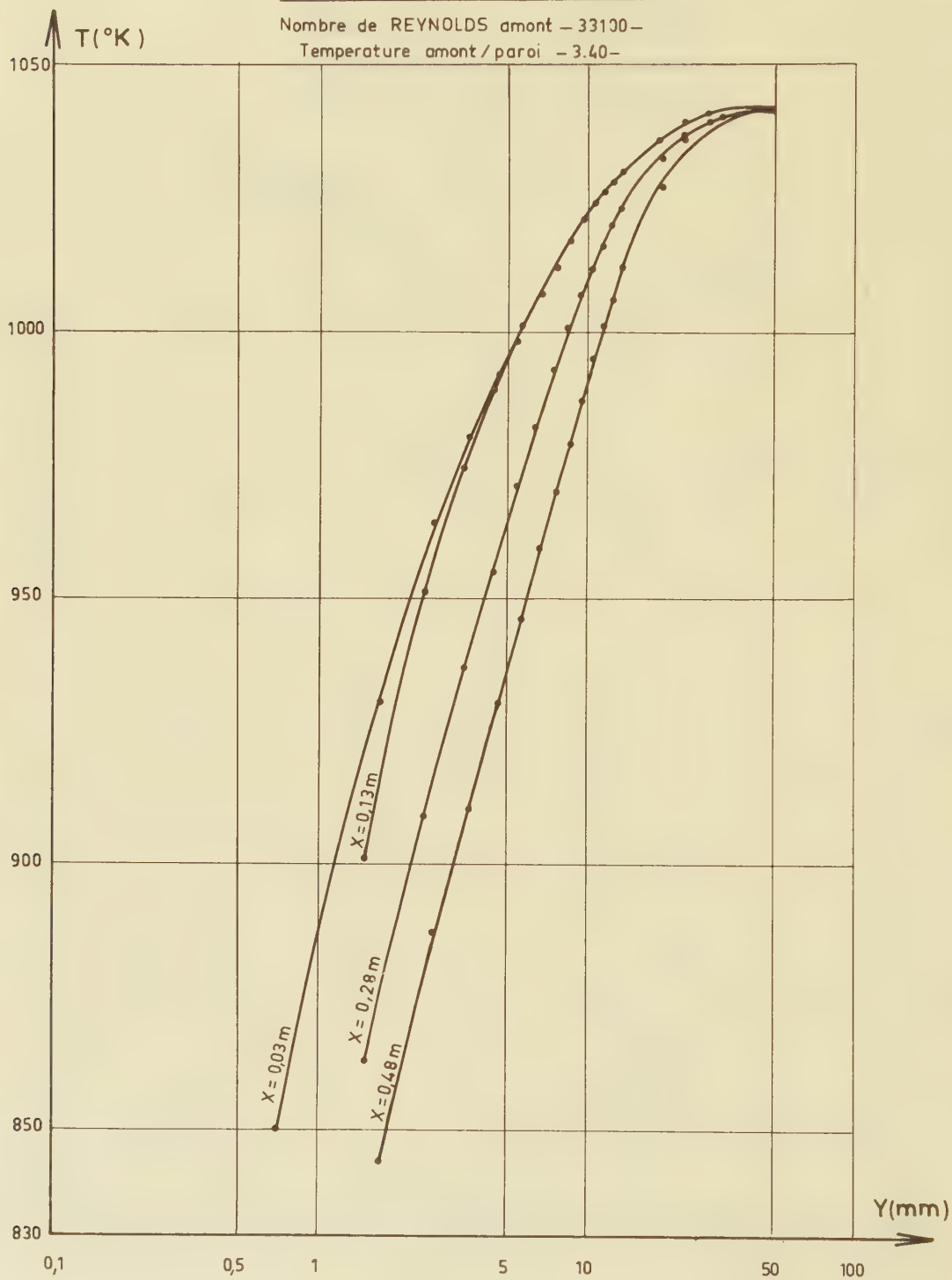
Planche 29

PROFILS de TEMPERATURE

Nombre de REYNOLDS amont - 38500 -

Temperature amont / paroi - 2.80 -

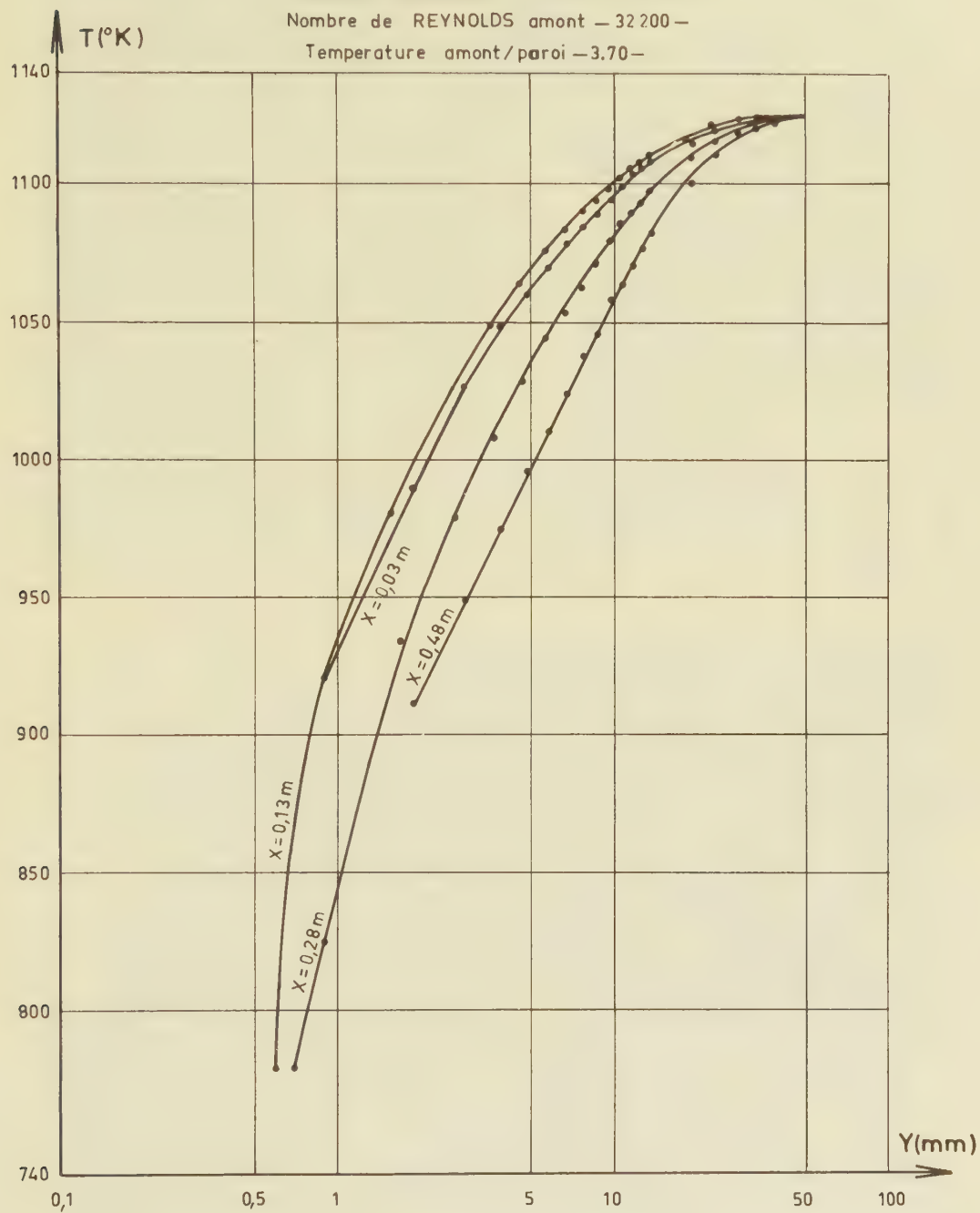


PROFILS de TEMPERATURE

PROFILS de TEMPERATURE

Nombre de REYNOLDS amont — 32 200 —

Temperature amont/pa'oi — 3.70 —



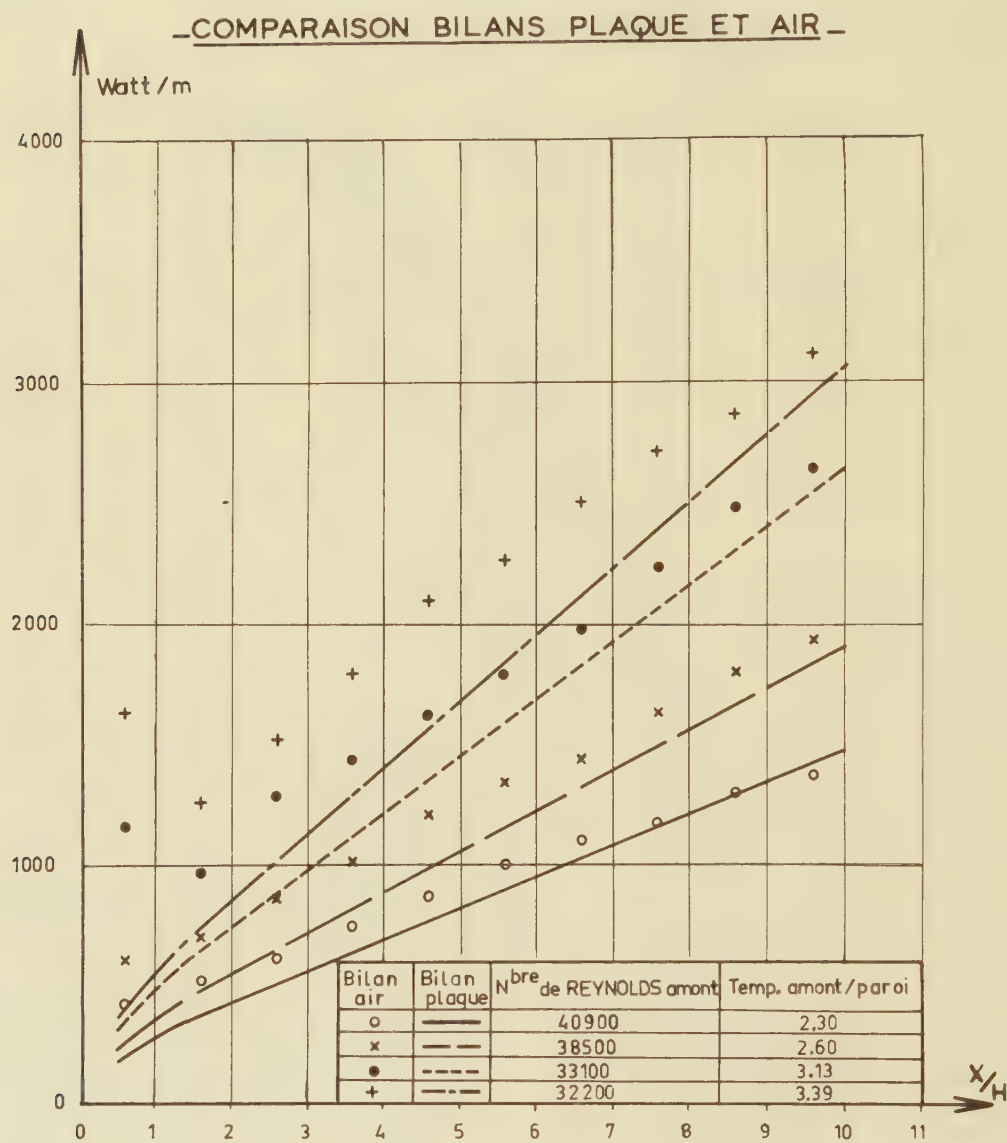
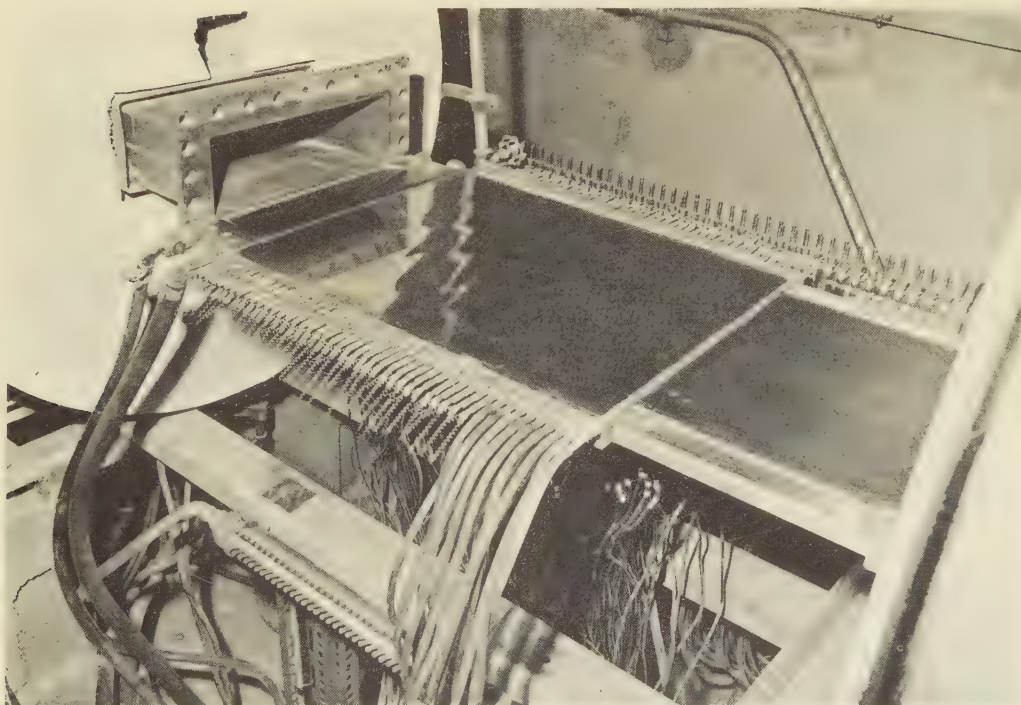


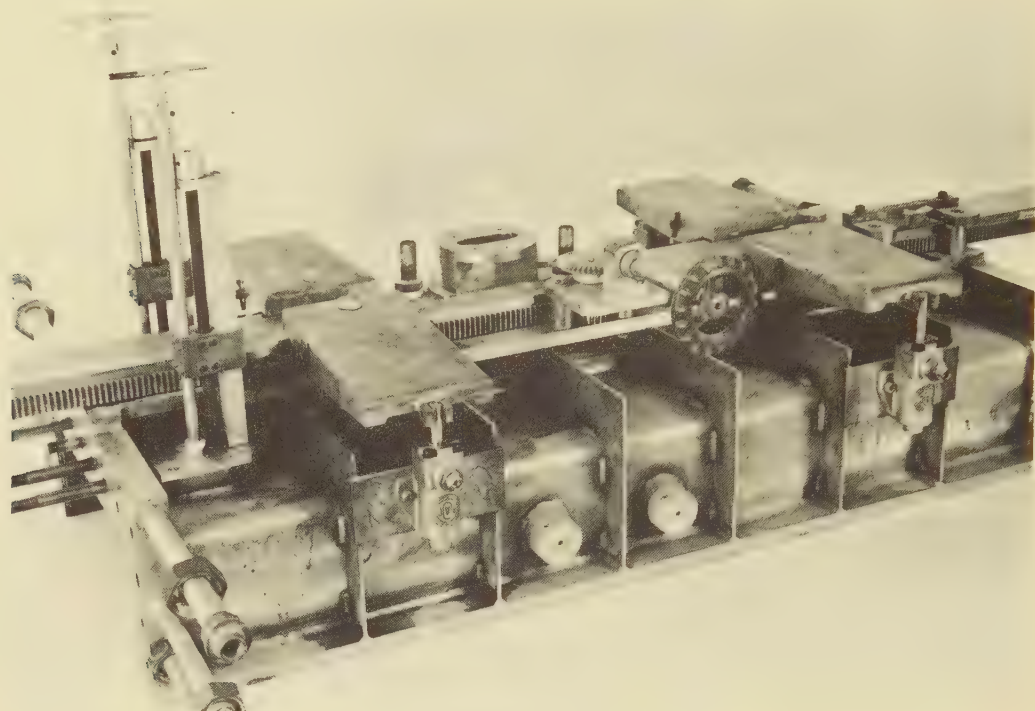
Planche 33



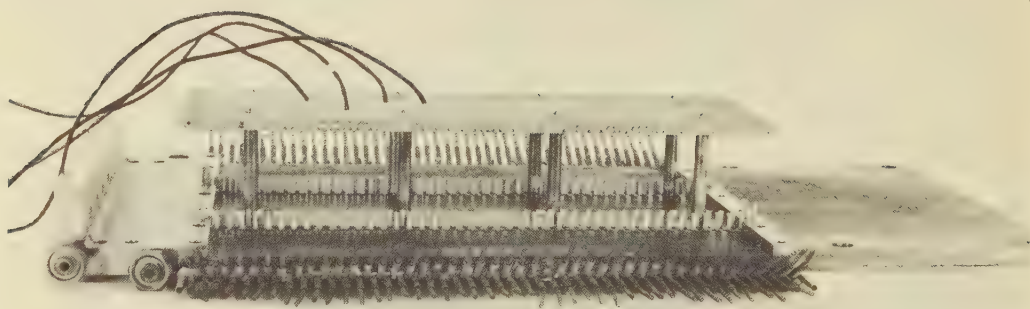
Vue d'ensemble



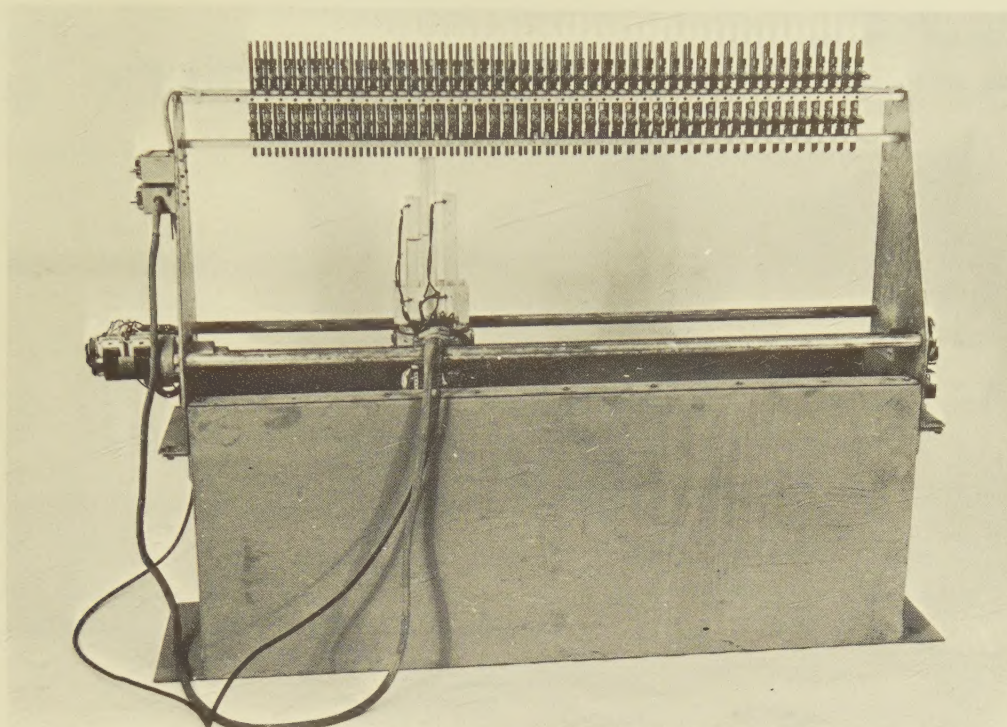
Plaque refroidie



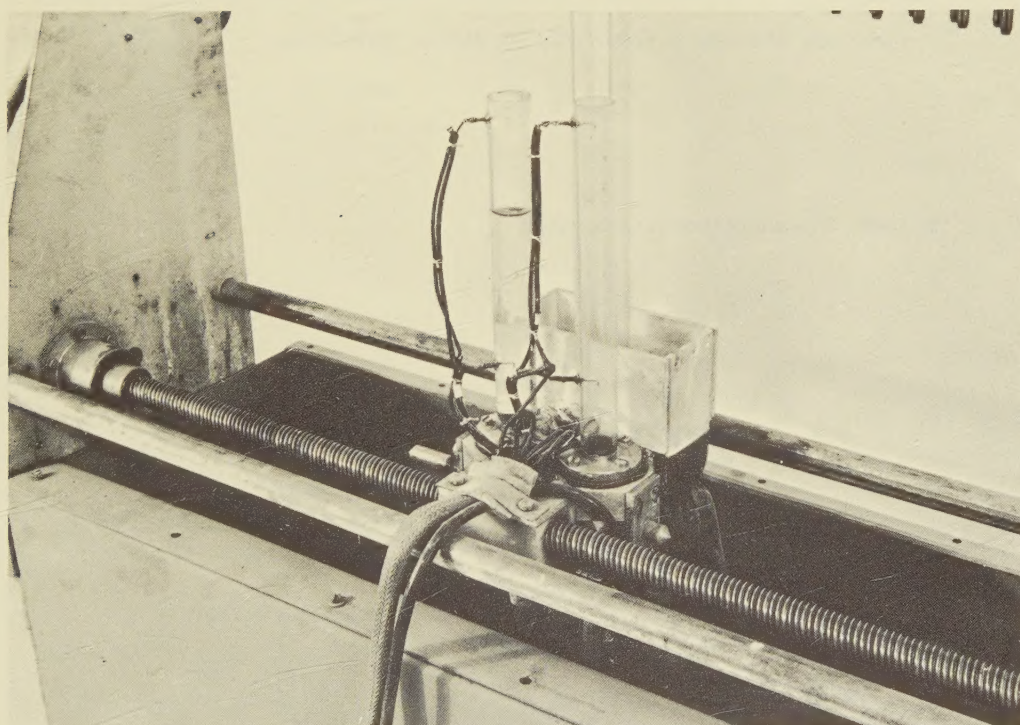
Tunnel de mesure



Plaque refroidie (Thermocouples - ressorts)



Dispositif de mesures de débits



Capacités jaugées

Académie de Paris

UNIVERSITE de PARIS VI
11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . D'ETAT
THESE DE : . . . SCIENCES. PHYSIQUES

NOM : . . . Monsieur RONAT
Prénoms : . . . Jean-Michel
né le 27 Août . . . 1939 à . . . Saint-Etienne Dép^t : . . . Loire

1ère THESE : . . . " Contribution à l'étude du transfert thermique en écoulement
turbulent d'un gaz à propriétés physiques variables.

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :



Vu et Approuvé
PARIS, le . . . 7 . Juillet . . 1971
Le Président
de l'Université de PARIS VI

A handwritten signature in dark ink, consisting of several stylized, overlapping strokes.

